Wolfram Volk[1], Stefan Diebels[2], Marc Lätzel[3], Stefan Luding[3]

[1] BMW AG, Werkzeug und Anlagenbau, D-80788 München
[2] Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Universität Stuttgart, D-70569 Stuttgart
[3] Institut für Computeranwendungen 1, Universität Stuttgart, D-70569 Stuttgart

Analogiebetrachtungen für mikropolare Kontinua mit Anwendung auf den Biaxialversuch

Zusammenfassung

Die makroskopische Beschreibung von lokal diskontinuierlichen Systemen (z. B. Granulaten) erfordert die Erweiterung der klassischen Kontinuumstheorie, um makroskopische Phänomene zu erfassen, die durch die Mikrostruktur hervorgerufen werden. Im vorliegenden Artikel werden zusätzliche rotatorische Freiheitsgrade im Sinne einer *Cosserat*-Theorie eingeführt und die zugehörigen mikropolaren Materialparameter durch einfache Analogiebetrachtungen mit mikroskopischen Größen in Verbindung gebracht. Schließlich werden mit Hilfe der diskreten Elementmethode die Überlegungen anhand des Biaxialversuchs verifiziert.

1 Einleitung

Die Berücksichtigung von Mikrostrukturen in der makroskopischen Beschreibung von verschiedensten Materialien, z. B. von Granulaten, Kristallen, Schäumen oder biologischen Geweben ist derzeit ein sehr wichtiges und populäres Forschungsgebiet der Materialtheorie.

Es gibt jedoch sehr unterschiedliche Möglichkeiten die heterogene Mikrostruktur für homogenisierte makroskopische Stoffgesetze in Betracht zu ziehen. Ein direkter Zugang ist der sogenannte „Mikro-Makro-Übergang“, der beispielsweise für kristalline Strukturen erfolgreich angewendet wurde, vgl. *Schröder* [20] und die darin zitierte Literatur. Diese Vorgehensweise bietet sich in erster Linie für periodisch wiederkehrende Mikrostrukturen an, die im Detail bekannt sind.

Bei stochastischen Mikrostrukturen (z. B. Granulate oder Schäume) ist es mit großen Schwierigkeiten verbunden, ein mikroskopisches Randwertproblem zu formulieren und zu lösen. Aus diesem Grund erscheint es vielversprechend, für diese Klassen von Materialien, den Übergang von der Mikro- zur Makroebene nicht explizit, sondern virtuell durchzuführen und hierauf aufbauend erweiterte kontinuumsmechanische Modelle mit zusätzlichen Freiheitsgraden und Materialparametern zu erhalten.

Exemplarisch sei an dieser Stelle die Arbeit von *Ehlers* [10] für gesättigte bzw. teilgesättigte poröse Materialien erwähnt.

Der nächste Schritt ist die Existens mikroskopischer Rotationen, die eine Einführung zusätzlicher rotatorischer Freiheitsgrade auf der Makroebene motiviert, welche aber auch einfach durch die diskontinuierliche Mikrostruktur motiviert werden können. Diese Idee geht auf eine Arbeit der Gebrüder *Cosserat* [5] zu Beginn des 20. Jahrhunderts zurück. Hierauf aufbauend ist es erforderlich, die Kinematik sowie die Bilanzaxiome zu erweitern, vgl. z. B. *Besdo* [1], *Eringen* & *Kafadar* [14], *de Borst* [3, 4], *Steinmann* [21, 22], *Diebels* & *Ehlers* [9], *Ehlers* & *Volk* [12], *Volk* [25] und *Diebels* [7, 8].

In der vorliegenden Arbeit werden die vorgestellten Ansätze zur Berücksichtigung der Mikrostruktur in einer makroskopischen Beschreibung miteinander verknüpft. Anhand einfachster Ersatzmodelle werden durch Analogieschlüsse die makroskopischen Materialparameter der *Cosserat*-Theorie mit mikroskopischen Einflußgrößen in Verbindung gebracht und diese Zusammenhänge mit Hilfe des Biaxialversuchs verifiziert. Zudem können die Materialparameter durch die beschriebene Vorgehensweise neu interpretiert werden.

Der Biaxialversuch wird unter Anwendung des sogenannten diskreten Elementmodells (DEM) (*Cundell* & *Strack* [6] und *Lätzel et al.* [17, 18]) und Definition der kontinuumsmechanischen Größen durch Mittelung über die beschreibenden mikroskopischen Größen beschrieben. Eine detaillierte Beschreibung der Simulationsmethode und des hier verwendeten Biaxialversuchs kann dem Artikel von S. Luding und H. J. Herrmann im vorliegenden Buch entnommen werden.

2 Kinematik

Im folgenden Kapitel werden die kinematischen Grundlagen eines leeren, mikropolaren Festkörperskeletts in aller Kürze vorgestellt. Dabei erfolgt eine Beschränkung auf den geometrisch linearen Bereich. Die Darstellung folgt eng der Schreibweise und Argumentationskette von *Diebels* [7, 8], *Diebels* & *Ehlers* [9], *Ehlers* & *Volk* [12] und *Volk* [25].

Ein mikropolarer Festkörper hat im Sinne einer *Lagrange*schen Beschreibung den Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ und den mikropolaren Rotationsvektor $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ als kinematische Freiheitsgrade. Die Einführung eines zusätzlichen Rotationsfeldes ist insbesondere bei Granulaten mit Hilfe eines mittleren Spins der Partikel sehr leicht zu motivieren. Der Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ ist die Differenz zwischen dem Ortsvektor $\mathbf{x}$ der aktuellen Konfiguration und dem Ortsvektor $\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \tag{1}$$

Der lineare Verschiebungsgradient $\mathbf{H}$ wird durch die Ableitung von $\mathbf{u}$ nach $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{x}$ gebildet:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}. \tag{2}$$

Der mikropolare Rotationsvektor setzt sich aus der Kontinuumsrotation $\boldsymbol{\varphi}$ und der freien, unabhängigen Rotion $\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}$ zusammen:

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi} + \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}, \qquad \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T\right). \tag{3}$$

Darin sind $\boldsymbol{\varphi}$ der axiale Vektor des schiefsymmetrischen Anteils von $\mathbf{H}$ und $\overset{3}{\mathbf{E}}$ der *Ricci*-Permutationstensor (voll antisymmetrischer Fundamentaltensor dritter Stufe). Der mikropolare Rotationsvektor $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ kann eindeutig durch den Rotationswinkel $\bar{\varphi}$ und die Rotationsachse $\bar{\mathbf{e}}$ beschrieben werden:

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \bar{\varphi}\,\bar{\mathbf{e}}. \tag{4}$$

Eine anschauliche Interpretation für die physikalische Bedeutung der drei verschiedenen Rotationen kann z. B. mit Hilfe eines *Timoschenko*-Balkens gegeben werden (vgl. *Günther* [15]), Bild 1.

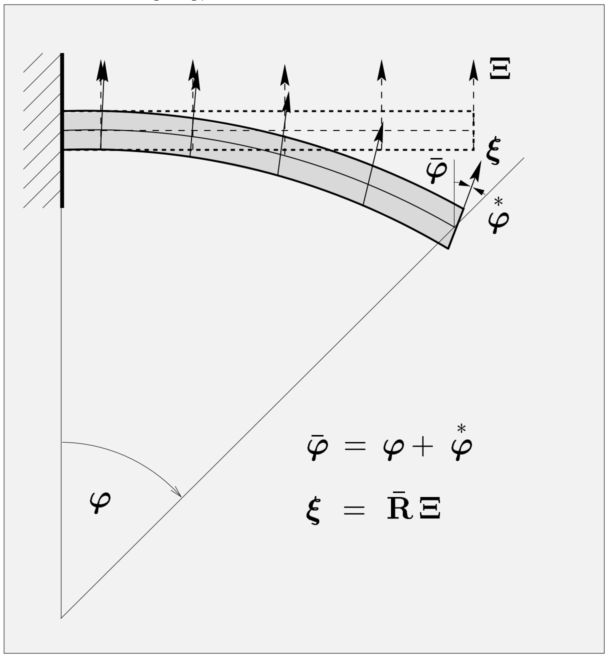

Bild 1: Rotationsvektoren bei einem *Timoshenko*-Balken

In Bild 1 sind $\boldsymbol{\Xi}$ und $\boldsymbol{\xi}$ die sogenannten Direktoren der Referenz- bzw. der aktuellen Konfiguration und $\bar{\mathbf{R}}$ iat ein eigentlich-orthogonaler Tensor, der die beiden Direktoren ineinander abbildet, vgl. *Besdo* [1] oder *Diebels* & *Ehlers* [9]. Die Verdrehung der Mittelachse des Balkens ist abhängig von der Verschiebung des Balkens und entspricht somit der Kontinuumsrotation $\boldsymbol{\varphi}$. Die Querschnitte, in deren Ebene die Direktoren $\boldsymbol{\Xi}$ und $\boldsymbol{\xi}$ liegen, können sich noch zusätzlich gegen die Mittelachse mit dem freien Rotationsvektor $\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}$ verdrehen, so daß $\boldsymbol{\xi}$ nicht mehr rechtwinklig zur Balkenmittelachse ist. Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie können die Rotationsvektoren zur Gesamtrotation $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ der Querschnitte summiert werden.

Das lineare mikropolare Verzerrungsmaß $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ist durch

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{H} + \overset{3}{\mathbf{E}}\,\bar{\boldsymbol{\varphi}} \tag{5}$$

definiert. Die symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteile von $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ergeben mit Hilfe der Gleichungen (3) und (5)

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{sym}} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{skw}} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) + \overset{3}{\mathbf{E}}\,\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \overset{3}{\mathbf{E}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}) = \overset{3}{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß der symmetrische Anteil von $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ gleich dem linearen Verzerrungsmaß der nicht-polaren Theorie ist, während sich der schiefsymmetrische Anteil direkt aus dem freien Rotationsvektor $\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}$ ergibt. Somit ist bei verschwindendem freien Rotationsfeld $\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}$ die Abwärtskompatibilität zur nicht-polaren Theorie gewährleistet.

In der mikropolaren Beschreibung wird mit dem Krümmungstensor $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ ein weiteres Deformationsmaß eingeführt:

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \operatorname{grad}\bar{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{7}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2) bis (7) und einigen algebraischen Umformungen kann die mikropolare Kompatibilitätsbedingung

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \tfrac{1}{2}\overset{3}{\mathbf{E}}(\operatorname{grad}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \operatorname{grad}^{\overset{13}{T}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \operatorname{grad}^{\overset{23}{T}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})^{\underline{2}} \tag{8}$$

hergeleitet werden, vgl. *Ehlers* & *Volk* [12] oder *Volk* [25]. Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß der Krümmungstensor $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ eine reine Funktion des Verzerrungsgradienten $\operatorname{grad}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ist. Auf eine elastisch-plastische Kinematik wird an dieser Stelle verzichtet und auf die Literatur verwiesen (z. B. *Diebels* [8], *Ehlers* & *Volk* [12], *Steinmann* [22] oder *Volk* [25]).

3 Bilanzrelationen

Das folgende Darstellung der Bilanzrelationen entstammt der Arbeit von *Volk* [25]. Das Aufstellen einer allgemeinen Bilanzrelation ist ein eleganter Weg, um die Aussagen der axiomatisch eingeführten Bilanzen für Masse, Impuls, Drall, Energie und Entropie zu finden (siehe z. B. *Diebels & Ehlers* [9] *Ehlers* [11] oder *Haupt* [16]):

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int\limits_{\mathcal{B}} \psi \mathrm{d}v \;&=\; \int\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}a \;+\; \int\limits_{\mathcal{B}} \upsilon \mathrm{d}v \;+\; \int\limits_{\mathcal{B}} \hat{\psi}\mathrm{d}v,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\psi} \mathrm{d}v \;&=\; \int\limits_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\Phi}\mathbf{n})\mathrm{d}a \;+\; \int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\upsilon} \mathrm{d}v \;+\; \int\limits_{\mathcal{B}} \hat{\boldsymbol{\psi}}\mathrm{d}v.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

In (9) ist ψ bzw. $\boldsymbol{\psi}$ die skalare oder vektorwertige Dichte der zu bilanzierenden mechanischen Größe, $\boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{n}$ bzw. $\boldsymbol{\Phi}\mathbf{n}$ ist der Ausfluß der mechanischen Größe infolge äußerer Nahwirkung mit dem nach außen gerichteten Oberflächennormaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$, υ bzw. $\boldsymbol{\upsilon}$ sind die Zufuhrterme infolge äußerer Fernwirkung und $\hat{\psi}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ sind die Produktionsterme der mechanischen Größe. Mit dem *Gauß*schen Integralsatz können die Oberflächenintegrale $\int_{\mathcal{S}}(\cdot)\mathrm{d}a$ ebenfalls in Volumenintegrale $\int_{\mathcal{B}}(\cdot)\mathrm{d}v$ überführt werden. Unter der Voraussetzung stetiger Integranden können durch Differentiation die lokalen Bilanzrelationen gewonnen werden:

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi} \;+\; \psi\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{x}} \;&=\; \mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi} \;+\; \upsilon \;+\; \hat{\psi}\,,\\
\dot{\boldsymbol{\psi}} \;+\; \boldsymbol{\psi}\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{x}} \;&=\; \mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi} \;+\; \boldsymbol{\upsilon} \;+\; \hat{\boldsymbol{\psi}}\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

In Tabelle 1 sind die physikalischen Größen, ihr Fluß, ihre Zufuhr und ihre Produktion aufgeführt, so daß aus Gleichungen (10) die jeweiligen Bilanzen entstehen.

	ψ, $\boldsymbol{\psi}$	$\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\Phi}$	υ, $\boldsymbol{\upsilon}$	$\hat{\psi}$, $\hat{\boldsymbol{\psi}}$
Masse	ρ	$\mathbf{0}$	0	0
Impuls	$\rho\,\dot{\mathbf{x}}$	$\mathbf{T}$	$\rho\,\mathbf{b}$	$\mathbf{0}$
Drall (klassisch)	$\mathbf{x}\times(\rho\,\dot{\mathbf{x}})$	$\mathbf{x}\times\mathbf{T}$	$\mathbf{x}\times\rho\,\mathbf{b}$	$\mathbf{0}$
Drall (mikropolar)	$\mathbf{x}\times(\rho\,\dot{\mathbf{x}}) + \rho\,\bar{\boldsymbol{\Theta}}\bar{\boldsymbol{\omega}}$	$\mathbf{x}\times\mathbf{T} + \mathbf{M}$	$\mathbf{x}\times\rho\,\mathbf{b} + \rho\,\mathbf{c}$	$\mathbf{0}$

Tabelle 1: Bilanzrelationen

In Tabelle 1 ist $\mathbf{T}$ der *Cauchy*sche Spannungstensor und $\mathbf{b}$ die spezifische Volumenkraft. Unter dem Tensor der Mikroträgheit $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ versteht man den über ein REV gemittelten Trägheitstensor der Mikropartikel, $\mathbf{M}$ ist der Momentenspannungstensor und $\mathbf{c}$ ist die spezifische Volumenmomentendichte. Auf die Bilanzrelationen für Energie und Entropie wird an dieser Stelle im Rahmen einer rein mechanischen Theorie verzichtet. Der interessierte Leser sei auf die Arbeiten von *Diebels* [7, 8] und *Eringen & Kafadar* [14] verwiesen.

Aus Tabelle 1 ergibt sich die Massenbilanz zu

$$\dot{\rho} \;+\; \rho\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{x}} \;=\; 0. \tag{11}$$

Mit Einsetzen der Massenbilanz (11) folgt für die Impulsbilanz die bekannte Form:

$$\rho\,\ddot{\mathbf{x}} \;=\; \operatorname{div}\mathbf{T} \,+\, \rho\,\mathbf{b}. \tag{12}$$

Mit den „niedrigeren“ Bilanzen (11) und (12) folgt in der klassischen Kontinuumsmechanik aus der Drallbilanz lediglich die Symmetrie des Spannungstensors:

$$\mathbf{0} \;=\; \mathbf{I} \times \mathbf{T}. \tag{13}$$

Das äußere Vektorprodukt zweier Tensoren ist dabei folgendermaßen definiert (vgl. *de Boer* [2]):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \;=\; -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \;=\overset{3}{\mathbf{E}}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B}^T). \tag{14}$$

In der mikropolaren Theorie erhält man die erweiterte Form der Drallbilanz

$$\rho\,(\bar{\boldsymbol{\Theta}}\,\bar{\boldsymbol{\omega}})^{\boldsymbol{\cdot}} \;=\; \mathbf{I} \times \mathbf{T} \,+\, \operatorname{div}\mathbf{M} \,+\, \rho\,\mathbf{c}. \tag{15}$$

Aus (15) folgt, daß der Spannungstensor im Rahmen einer mikropolaren Theorie in der Regel unsymmetrisch ist.

Neben den in Tabelle 1 genannten Bilanzen ist für mikropolare Materialien die sogenannte Erhaltung der Mikroträgheit von Interesse (*Eringen* [13], *Eringen* & *Kafadar* [14]). Die Annahme starrer Mikropartikel führt zur Aussage, daß die mikropolare *Green-Naghdi*-Ableitung (Zeitableitung bezüglich eines mit der Mikrobewegung mitrotierten Basissystems) des Tensors der Mikroträgheit $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ verschwinden muß:

$$\overset{\blacklozenge}{\bar{\boldsymbol{\Theta}}} \;=\; \dot{\bar{\boldsymbol{\Theta}}} \,-\, \bar{\boldsymbol{\Omega}}\,\bar{\boldsymbol{\Theta}} \,-\, \bar{\boldsymbol{\Theta}}\,\bar{\boldsymbol{\Omega}}^T \;=\; \mathbf{0}. \tag{16}$$

Darin ist $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ der mikropolare Kreiseltensor

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} \;=\; \dot{\bar{\mathbf{R}}}\,\bar{\mathbf{R}}^T. \tag{17}$$

Aus (16) ergibt sich

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\Theta}}} \;=\; 2\,(\,\bar{\boldsymbol{\Omega}}\,\bar{\boldsymbol{\Theta}}\,)_{\rm sym}. \tag{18}$$

Diese Gleichung liefert in Verbindung mit der Massenbilanz (11) eine Beziehung, die die Form einer Erhaltungsgleichung für die Mikroträgheit besitzt:

$$(\rho\,\bar{\boldsymbol{\Theta}})^{\boldsymbol{\cdot}} \,+\, \rho\,\bar{\boldsymbol{\Theta}}\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}} \;=\; 2\,\rho\,(\,\bar{\boldsymbol{\Omega}}\,\bar{\boldsymbol{\Theta}}\,)_{\rm sym}. \tag{19}$$

Die Beziehung (19) ist jedoch keine Bilanzgleichung im üblichen Sinn, da sie auf kinematischen Überlegungen beruht und nicht axiomatisch eingeführt wird. Da (19) jedoch prinzipiell die Form der lokalen Bilanz (10) besitzt, spricht man auch gelegentlich von der Bilanz der Mikroträgheit (z. B. *Eringen* [13], *Eringen* & *Kafadar* [14]).

Mit (19) kann die mikropolare Drallbilanz (15) schließlich in die folgende Form gebracht werden:

$$\rho\,\bar{\boldsymbol{\Theta}}\,\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + 2\,\rho\,(\bar{\boldsymbol{\Omega}}\,\bar{\boldsymbol{\Theta}})_{\rm sym}\,\bar{\boldsymbol{\omega}} = \operatorname{div}\mathbf{M} + \mathbf{I}\times\mathbf{T} + \rho\,\mathbf{c}. \tag{20}$$

4 Konstitutivannahmen

Mit den Beziehungen aus den beiden vorhergehenden Kapiteln sind die beschreibenden Gleichungen des mikropolaren Kontinuums bis auf fehlende Konstitutivgleichungen bestimmt.

Zur Behandlung elastischen Materialverhaltens wird angenommen, daß der mikropolare Spannungstensor $\mathbf{T}$ lediglich von den Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ gemäß Gleichung (5) abhängt. Aus materialtheoretischer Sicht wäre es prinzipiell möglich, daß $\mathbf{T}$ auch eine Funktion der Krümmung ist, doch soll dies konstitutiv ausgeschlossen werden. Neben der geometrischen Linearität wird im folgenden ebenfalls eine materielle Linearität für das Elastizitätsgesetz angenommen. Somit ergibt sich für isotropes Materialverhalten ein modifiziertes *Hooke*sches Gesetz mit drei Elastizitätskonstanten (vgl. *de Borst* [4], *Ehlers* & *Volk* [12] und *Steinmann* & *Willam* [24]):

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \overset{4}{\mathbf{C}}\;\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &&= 2\,\mu\,\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\rm sym} + \lambda\,(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{I})\,\mathbf{I} + 2\,\mu_c\,\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\rm skw},\\
\mathbf{T}_{\rm sym} &= \overset{4}{\mathbf{C}}\;\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\rm sym} &&= 2\,\mu\,\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\rm sym} + \lambda\,(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\mathbf{I})\,\mathbf{I},\\
\mathbf{T}_{\rm skw} &= \overset{4}{\mathbf{C}}\;\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\rm skw} &&= 2\,\mu_c\,\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\rm skw}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Darin ist $\overset{4}{\mathbf{C}}$ der 4-stufige Elastizitätstensor

$$\begin{aligned}
\overset{4}{\mathbf{C}} &= 2\,\mu\;\overset{4}{\mathbf{I}}_{\rm sym} + \lambda\,\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\,\mu_c\;\overset{4}{\mathbf{I}}_{\rm skw},\\
\overset{4}{\mathbf{I}}_{\rm sym} &= \tfrac{1}{2}[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})^{\overset{23}{T}} + (\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})^{\overset{13}{T}}],\\
\overset{4}{\mathbf{I}}_{\rm skw} &= \tfrac{1}{2}[(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})^{\overset{23}{T}} - (\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})^{\overset{13}{T}}].
\end{aligned} \tag{22}$$

Die Materialparameter μ und λ entsprechen den *Lamé*schen Konstanten der nichtpolaren Elastizitätstheorie, so daß der symmetrische Anteil des mikropolaren Spannungstensors mit dem nicht-polaren Spannungstensor äquivalent ist. Der zusätzliche Materialparameter μ_c ist der Proportionalitätsfaktor zwischen den schiefsymmetrischen Anteilen von $\mathbf{T}$ und $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Die 4-stufigen Fundamentaltensoren $\overset{4}{\mathbf{I}}_{\rm sym}$ und

$\overset{4}{\mathbf{I}}_{\mathrm{skw}}$ bilden bei Anwendung auf einen 2-stufigen Tensor dessen symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Anteil.

In analoger Weise hängt die Momentenspannung $\mathbf{M}$ ausschließlich von der Krümmung $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ ab. Somit kann hier generell für $\mathbf{M}$ ein vergleichbarer Ansatz mit drei Materialparametern gewählt werden, jedoch wird vereinfachend ein direkt proportionaler Zusammenhang zwischen $\mathbf{M}$ und $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ angenommen, vgl. *de Borst* [3, 4]:

$$\mathbf{M} = 2\,\mu_c\,(l_c)^2\,\bar{\boldsymbol{\kappa}}\,. \tag{23}$$

Aus Dimensionsgründen erscheint in (23) ein Materialparameter l_c mit der Einheit „Länge“. Man beachte, daß l_c nicht direkt mit materialspezifischen Größen wie z. B. der Korngröße identifiziert werden kann. Dies wird im folgenden Kapitel noch eingehend gezeigt.

5 Motivation der Materialgesetze und Materialparameter

In diesem Kapitel werden die verwendeten mikropolaren Elastizitätsgesetze anhand einfacher eindimensionaler Betrachtungen auf mikroskopischer Ebene motiviert. Ähnliche Überlegungen sind der Arbeit von *Mühlhaus & Vardoulakis* [19] zu entnehmen.

Ausgangspunkt sind zwei elliptische Scheiben, die durch eine seitliche Kraft f aneinandergedrückt werden. Nach einer Verdrehung der Scheiben gegeneinander um den Winkel $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ wandert der Kontaktpunkt nach unten und es ensteht ein Rückstellmoment m_c, da neben der Kontakttangentialkraft auch die Kontaktnormalkraft einen Hebelarm besitzt, vgl. Bild 2.

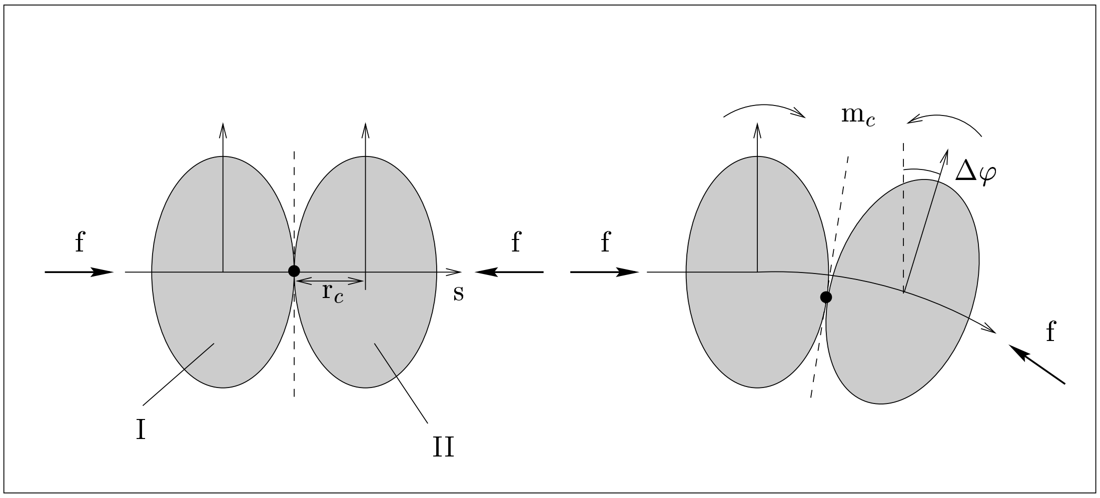

Bild 2: Rückstellmoment bei elliptischen Scheiben unter Seitendruck

Die spezielle Wahl der elliptischen Ausgangsgeometrie soll nur exemplarischen Charakter haben. Daher wird eine Transformation auf eine kreisförmige Geometrie durchgeführt, deren Radius r_c im vorliegenden Fall der kleineren Hauptachse der elliptischen Scheibe entsprechen soll, d. h. die Geometrie in der Nähe des Kontaktpunkts wird durch einen Kreis approximiert. Es wird angenommen, daß das Rückstellmoment m_c der Kontaktnormalkraft in der elliptischen Ausgangsgeometrie in erster Näherung proportional zum relativen Verdrehwinkel $\Delta\varphi$ ist, während bei einer kreisförmigen Geometrie die Kontaktnormalkraft immer zentrisch wirkt und kein Moment verursacht. Die Transformation auf die kreisförmige Ersatzgeometrie macht daraufhin die Einführung einer Drehfeder erforderlich, die ein zusätzliches Rückstellmoment bewirkt, das proportional zu $\Delta\varphi$ ist, siehe Bild 3. Die Drehfederkonstante ν_c beschreibt in dieser Argumentation die Zwangskräfte, die bei einer Drehung durch die nicht kreisförmige Ausgangsgeometrie entstehen.

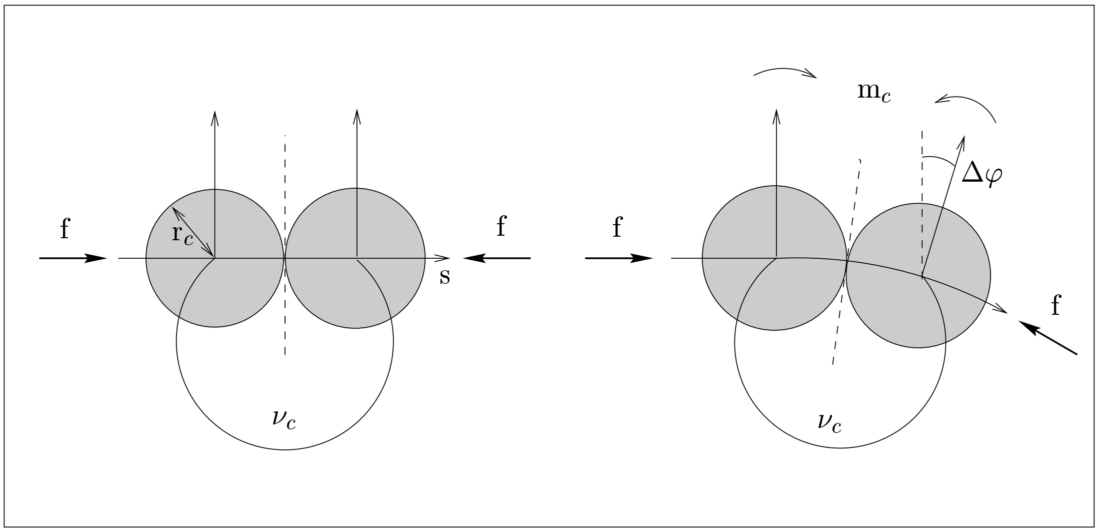

Bild 3: Einführung der Drehfeder auf kreisförmiger Geometrie

Es wird weiterhin angenommen, daß die tangentialen Kontaktkräfte, die durch Haftreibung hervorgerufen werden, durch eine Tangentialfeder mit der Steifigkeit ζ_c beschrieben werden können (*Cundall* & *Strack* [6]). Man beachte, daß durch die Tangentialfeder keine Dissipation durch Gleiten entsteht und der gesamte Deformationsprozeß reversibel ist, d. h. es liegt rein elastisches Materialverhalten vor.

Es wird zudem vernachlässigt, daß Reibung auch durch die Relativbewegung von Teilchen ohne Rotationen z. B. bei einfacher Scherung entstehen kann.

In Bild 4 sind die Kräfte und Momente für die ausgelenkte Ersatzstruktur eingezeichnet.

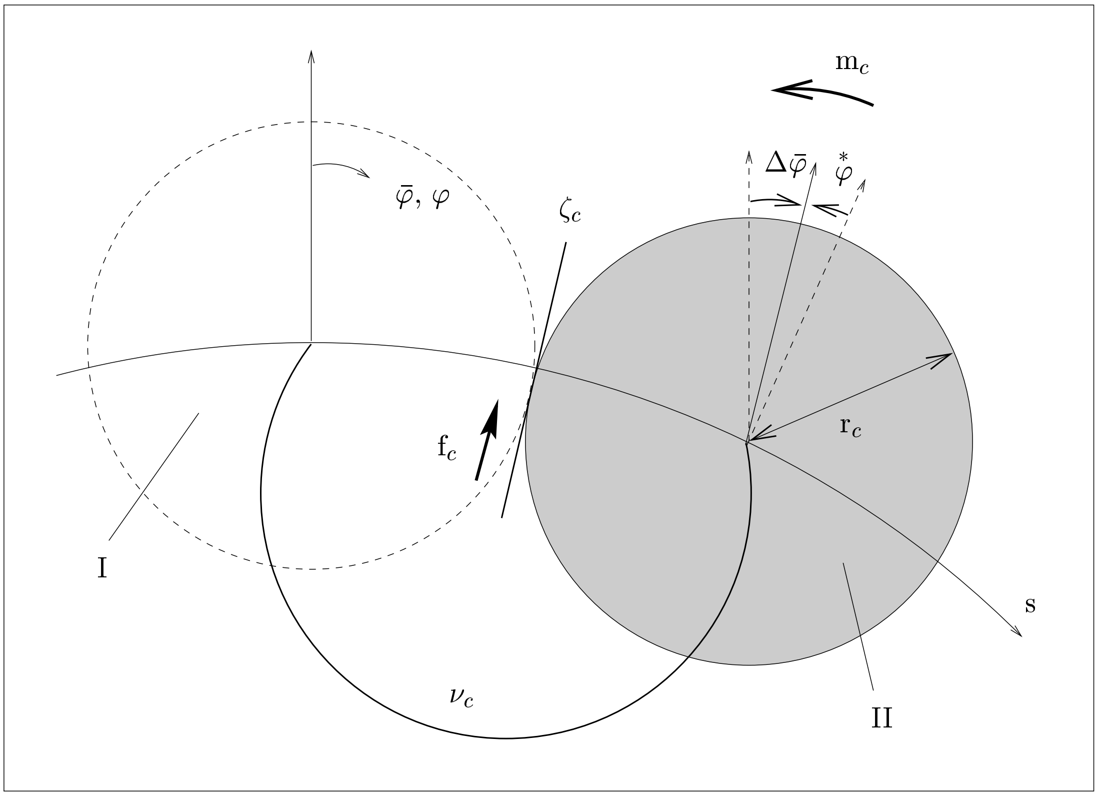

Bild 4: Kräfte und Momente auf Ersatzstruktur

Nach der Verdrehung ist die Drehfeder gespannt, während die Tangentialfeder noch unbelastet ist. Um das Momentengleichgewicht wiederherzustellen, verdrehen sich die beiden Körper gegeneinander, und die Tangentialfeder wird gespannt. Wenn das Moment infolge der Tangentialkraft das Moment der Drehfeder egalisiert, ist die statische Ruhelage erreicht. Das Moment m_c hat dann den Wert

$$\mathrm{m}_c = \nu_c (\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1) = \Delta\,\bar{\varphi}. \tag{24}$$

Bei dieser Annahme wird vernachlässigt, daß auch eine Drehung in die gleiche Richtung ein Moment induzieren kann. Die Entwicklung des Winkelinkrements $\Delta\,\bar{\varphi}$ über dem Linienparameter s liefert:

$$\Delta\,\bar{\varphi} = \frac{\partial\,\bar{\varphi}}{\partial\,s}\Delta s, \qquad \Delta s = 2\,r_c. \tag{25}$$

Einsetzen der Beziehungen (25) in (24) ergibt für das Moment m_c

$$\mathrm{m}_c = 2\,\nu_c\,r_c\,\frac{\partial\,\bar{\varphi}}{\partial\,s}. \tag{26}$$

Die Tangentialkraft f_c genügt der folgenden Beziehung:

$$\mathrm{f}_c = \zeta_c \, r_c \, \overset{*}{\varphi}, \qquad \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_2 - \varphi_2. \tag{27}$$

Es wird nun vorausgesetzt, daß der Momentenspannungsvektor $\mathbf{m}$ den mittleren Momenten m_c auf einem Flächenelement d$\mathbf{a}$ mit der Flächennormalen $\mathbf{n}$ entspricht und daß der Momentenspannungstensor $\mathbf{M}$ durch ein *Cauchy*-Theorem mit dem Momentenspannungsvektor verknüpft ist:

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}\,\mathbf{n}. \tag{28}$$

Im Rahmen einer quasistatischen Betrachtungsweise der Drallbilanz wird die Divergenz der Momentenspannungen durch den schiefsymmetrischen Anteil des Spannungszustands ins Momentengleichgewicht gebracht, vgl. (20). Im Beispiel aus Bild 4 sind die äußeren Ränder momentenspannungsfrei und das Moment m_c entspricht demnach dem Momentenfluß und steht somit in Analogie zum kontinuumsmechanischen Divergenzterm. Nun wird m_c im vorliegenden Beispiel durch das Moment infolge der Tangentialkraft ins Gleichgewicht gebracht, so daß der Analogieschluß naheliegt, daß die mittlere Tangentialkraft f_c pro Flächenelement d$\mathbf{a}$ die gleiche Bedeutung wie der schiefsymmetrische Anteil des Spannungstensors $\mathbf{T}_{skw}$ in der kontinuumsmechanischen Beschreibung hat.

Ein Vergleich von (26) und (27) mit den elastischen Gesetzen der Momentenspannungen (23) bzw. der Spannungen (21) zeigt mit den genannten Überlegungen interessante Analogien. Die Verallgemeinerung der Linienableitung des Winkels $\bar{\varphi}$ ergibt den Gradienten, der im konstitutiven Ansatz der Momentenspannungen vorhanden ist. Der Proportionalitätsfaktor $2\,\mu_c\,l_c^2$ beinhaltet nach dieser Argumentation Information sowohl über mittlere Partikelgröße als auch über die Partikelform. Die Tangentialfederkraft entspricht in diesem Zusammenhang dem schiefsymmetrischen Anteil des Spannungstensors und ist proportional zum freien Rotationsfeld, sofern elastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird. Der Proportionalitätsfaktor μ_c wird demnach durch den mittleren Teilchenradius und das lokale mechanische Kontaktverhalten bestimmt. Durch die Kopplung der drei fundamental unterschiedlichen mikroskopischen Eigenschaften, Partikelgröße, Partikelform und Kontaktgesetz in den Materialparametern μ_c und l_c ist es prinzipiell unmöglich, in den etablierten Materialgesetzen die genannten Einflußgrößen zu separieren.

Zusammenfassend lassen sich die folgenden Aussagen gewinnen:

- Die mittlere Partikelform und Lagerungsdichte bestimmt die Drehfedersteifigkeit ν_c.
- Die mittlere Partikelgröße wird durch r_c bestimmt.
- Das lokale mikroskopische Kontaktverhalten wird durch die Steifigkeit ζ_c der Tangentialfeder wiedergegeben.

- Für den mikropolaren Materialparameter μ_c ergibt sich der Zusammenhang

$$\mu_c \sim \zeta_c r_c. \tag{29}$$

- Die interne Länge l_c repräsentiert das Verhältnis aus Drehfedersteifigkeit und Tangentialfedersteifigkeit:

$$l_c \sim \sqrt{\frac{\nu_c}{\zeta_c}}. \tag{30}$$

6 Sonderfall für kreisförmige Mikrobausteine

Es soll der Sonderfall von kreisförmigen Mikrobausteinen (Scheiben) behandelt werden, die sich in einer Ebene befinden. Anwendungsbeispiel ist der Biaxialversuch, auf den noch im Detail eingegangen wird. Weiterhin sollen keine Volumenmomente $\mathbf{c}$ vorhanden sein.

Mit den Untersuchungen des vorhergehenden Kapitels ergeben sich hierfür folgende Aussagen:

1. Die interne Länge l_c ist null, da für kreisförmige Partikel die Drehfedersteifigkeit verschwindet, und somit dürfen auch keine Momentenspannungen auftreten.
2. Der mikropolare Materialparameter μ_c kann ungleich null sein, da eine endliche Partikelgröße und eine Tangentialfedersteifigkeit vorhanden sind.

Mit diesen Aussagen und der offensichtlichen Annahme, daß für kreisförmige Partikel der Tensor der Mikroträgheit $\bar{\mathbf{\Theta}} = \bar{\Theta}\,\mathbf{I}$ Diagonalform besitzt, reduziert sich die mikropolare Drallbilanz (20) zu

$$\rho\,\bar{\Theta}\,\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I} \times \mathbf{T}\,. \tag{31}$$

Somit muß der Spannungstensor $\mathbf{T}$ nur im quasistatischen Fall symmetrisch sein. Sofern der dynamische Term auf der linken Seite ungleich null ist, ergibt sich auch ein unsymmetrischer Spannungstensor und daraus folgend auch ein unsymmetrischer Verzerrungstensor.

Mit Hilfe von Gleichungen (6) und (21) kann der rechte Term von (31) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{I} \times \mathbf{T} = -2\,\mu_c\,\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{32}$$

Es wird nun ein stationärer makroskopischer Zustand des Scheibenmodells angenommen. Dies bedeutet, daß es eine konstante Kontinuumsrotationsgeschwindigkeit

$\boldsymbol{\omega}$ gibt und eine Fluktuation der einzelnen Partikel von der Kontinuumsrotation auftritt, die jedoch im Mittel über alle Partikel verschwindet. Diese Fluktuation wird nun detaillierter untersucht und angenommen, daß ein periodischer Ansatz für $\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}$ gültig ist:

$$\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{a} \sin(\omega_f t + \varphi^i) \tag{33}$$

Darin ist $\mathbf{a}$ die Fluktuationsamplitude, ω_f die Fluktuationswinkelgeschwindigkeit und φ^i der individuelle Phasenwinkel jedes einzelnen Partikels. Hieraus ergibt sich für die mikropolare Rotationsgeschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ die folgende Gleichung:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \overset{*}{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{a}\, \omega_f \cos(\omega_f t + \varphi^i). \tag{34}$$

Durch eine weitere Zeitdifferentiation erhält man einen Zusammenhang für die mikropolare Winkelbeschleunigung $\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}$:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{a}\, \omega_f^2 \sin(\omega_f t + \varphi^i) = -\mathbf{a}\, \omega_f^2 \sin(\omega_f t + \varphi^i)\,, \tag{35}$$

denn $\boldsymbol{\omega}$ wurde als konstant (stationär) angenommen. Einsetzen von Gleichungen (32),(33) und (35) in (31) liefert das folgende interessante Ergebnis:

$$-\rho\, \omega_f^2\, \bar{\Theta}\, \mathbf{a} = -2\, \mu_c\, \mathbf{a}. \tag{36}$$

Als Folge ergibt sich einerseits eine Beziehung für μ_c

$$\mu_c = \frac{1}{2} \rho\, \bar{\Theta}\, \omega_f^2, \tag{37}$$

und andererseits wird auch deutlich, daß eine betragsmäßige Mittelung von (36) einen nichtsymmetrischen Anteil des Spannungstensors von

$$\mathbf{I} \times \mathbf{T} = -\mu_c\, |\mathbf{a}_{max}|\mathbf{e}_3 \tag{38}$$

erwarten läßt.

7 Untersuchung des Biaxialversuchs

Im folgenden Biaxial-Versuch ist die rechte, senkrechte Wand spannungs-, die obere, waagrechte Wand verschiebungsgesteuert. Die obere Wand bewegt sich nach unten, die linke Wand, sowie der Boden sind unbeweglich. Das System wird in einem isotropen Spannungszustand prepariert und anschließend relaxiert bis die kinetische

Energie sowohl der translatorischen als auch der rotatorischen Freiheitsgrade dissipiert ist. Es existieren also weder rotatorische Großen noch schiefsymmetrische Spannungen in diesem relaxierten Anfangszustand. Dieser ist damit konsistent mit den Überlegungen des vorherigen Abschnitts. Die Deckenwand wird langsam nach unten bewegt. Dabei erreicht das Material nach einer Verschiebung von $\varepsilon_z \approx 0.02$ sein maximales Spannungsverhältnis $\sigma_{zz}/\sigma_{xx} \approx 2.8$. (Aus Konsistenz zu anderen Arbeiten wird der Spannungstensor, der mit Hilfe der DEM berechnet wurde, mit σ anstatt $\mathbf{T}$ bezeichnet.) Im weiteren Verlauf der Deformation findet, wie in Bild 5 zu erkennen, eine Entfestigung statt. Das Maximum der Spannungskurve ist deutlicher als das Maximum des Fabric-Tensors (Strukturtensor), welcher ein Maß für die mittlere Kontaktanzahl ist. Die rotatorischen Freiheitsgrade werden im folgenden im kritischen Bereich bei einer Verschiebung von $\varepsilon_z \approx 0.12$ untersucht. Eine Momentaufnahme der Simulation ist in Bild 6 gezeigt, dabei bedeuten die Farben eine Winkelgeschwindigkeit von null (grün), im Uhrzeigersinn (rot) und gegen den Uhrzeigersinn (blau).

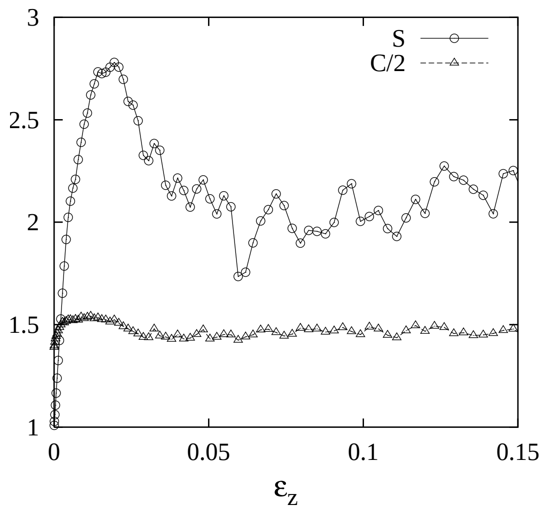

Bild 5: Spannungsverhältnis $S = \sigma_{zz}/\sigma_{xx}$ über der Vertikalverschiebung ε_z. Die zweite Kurve sind die Mittelwerte der Spur des Fabric-Tensors $C/2 = tr(\mathbf{F})$[17].

Im folgenden wollen wir unsere Betrachtungen auf die rotatorischen Freiheitsgrade und die damit verbundenen Größen beschränken. Diese Größen sind im einzelnen: der Winkel der Teilchenorientierung ϕ, die Winkelgeschwindigkeit ω und die Oberflächengeschwindigkeit $(a\omega)^2$. Außerdem tritt in der mikropolaren Theorie der schiefsymmetrische Anteil des Spannungstensors $\sigma^A = \mathbf{T}_{\text{skw}}$ auf. Für die Mittelungen wird das System mit den Abmessungen $l_x \approx 0.075\,\text{m} \times l_z \approx 0.108\,\text{m}$ (B $\times$ H) in 20×20 Zellen unterteilt, welche jeweils ca. $N/400 \approx 5$ Teilchen mit $N = 1950$ enthalten.

Die Teilchenorientierung ist in Bild 7 dargestellt. Die Isolinien zeigen, daß nur Teilchen in der Scherzone rotieren und die Rotationsrichtung bevorzugt positiv (im Uhrzeigersinn) ist.

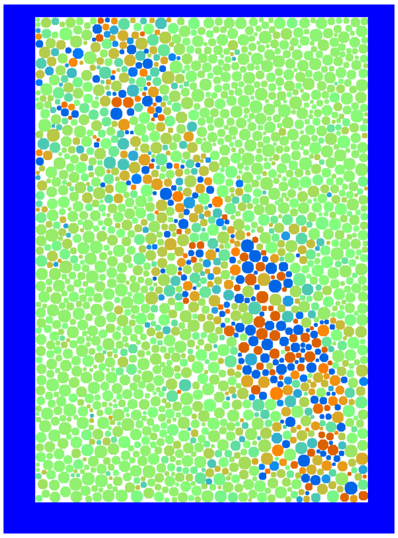

Bild 6: Momentaufnahme der Simulation zum Zeitpunkt $\varepsilon_z \approx 0.12$.

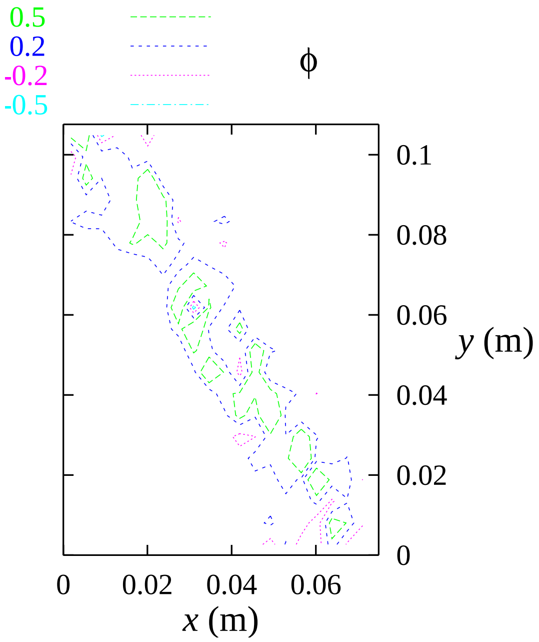

Bild 7: Gemittelter Winkel der Teilchenorientierung ϕ als Konturlinien. Die Werte der Isolinien sind in beliebigen Einheiten angegeben, um starke Abweichungen von Null hervorzuheben.

Die Winkelgeschwindigkeiten in Bild 8 unterstreichen die Ergebnisse für ϕ. Die Mehrzahl der Teilchen rotiert in Übereinstimmung mit der Scherrichtung im Uhrzeigersinn. Die Oberflächengeschwindigkeit in Bild 9 führt zu keinen weiteren Erkenntnissen; allerdings stellt man starke Amplituden in den Ecken (rechts unten und links oben) fest. Im Gegensatz zur relaxierten Anfangsbedingung, in welcher die Spannung symmetrisch ist, findet sich in Bild 10 ein schiefsymmetrischer Anteil des Spannungs-

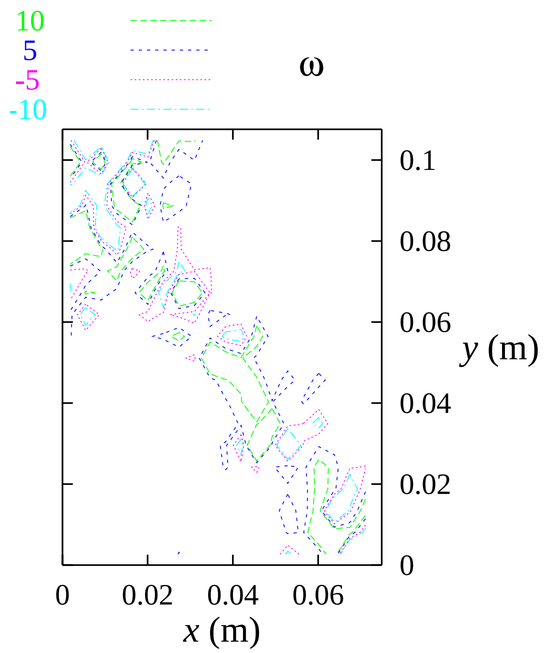

Bild 8: Gemittelte Teilchenwinkelgeschwindigkeit ω, dargestellt als Konturlinien.

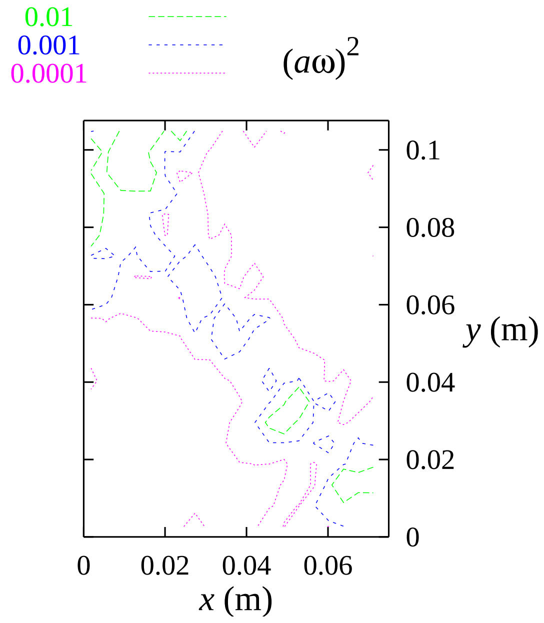

Bild 9: Gemittelte quadrierte Teilchenoberflächengeschwindigkeit $(a\omega)^2$ dargestellt als Konturlinien.

tensors. Dies steht somit im Einklang zu den vorherigen Ausführungen. Die Bildung eines Scherbandes ist in dieser Darstellung nicht deutlich zu erkennen. Es erscheint breiter und die schiefsymmetrischen Anteile scheinen in „Inseln“ lokalisiert zu sein. Auch läßt sich die eindeutige Rotationsrichtung nicht aus den schiefsymmetrischen

Spannungen ablesen. Dies erklärt sich auch durch die These, daß bei kreisförmigen Partikeln die Fluktuationen um den Mittelwert den schiefsymmetrischen Anteil induzieren, vgl. Gleichungen (35) bis (37).

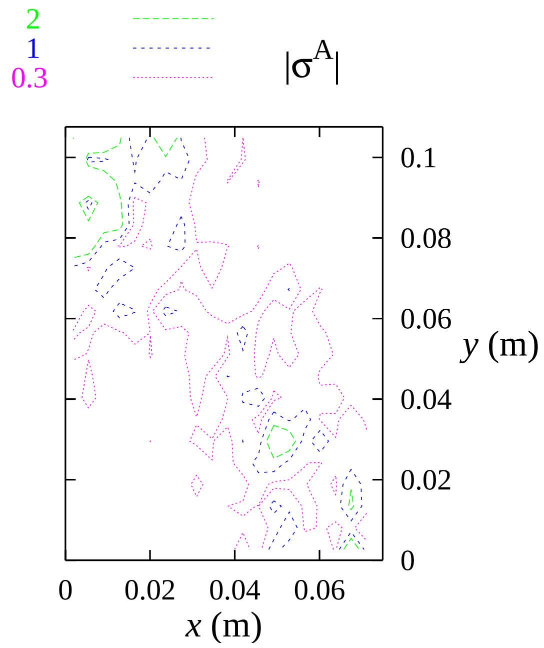

Bild 10: Absolutbetrag des schiefsymmetrischen Anteils der Spannungstensoren dargestellt als Konturlinien.

Um die Korrelation zwischen der Winkelgeschwindigkeit und den schiefsymmetrischen Anteilen des Spannungstensors zu erhalten, sind in Abb. 11 schließlich die zugehörigen Werte für alle Mittelungsvolumina gegeneinander aufgetragen.

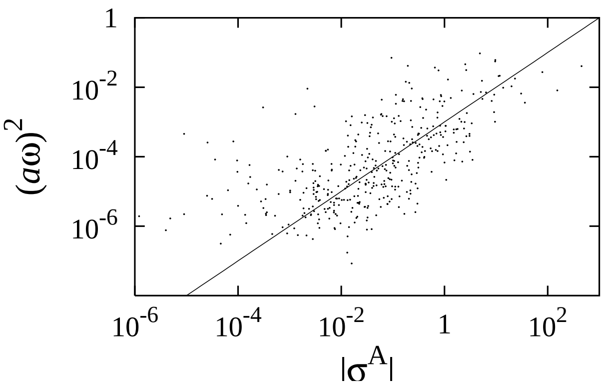

Bild 11: Quadrierte Teilchenoberflächengeschwindigkeit über den nicht symmetrischen Anteilen des Spannungstensors. Die Linie zeigt $(a\omega)^2 \approx 10^{-3}|\sigma^A|$ an.

Wir bedanken uns für die Unterstützung der Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) und für hilfreiche Diskussionen bei C. Goldenberg und I. Goldhirsch.

Literatur

[1] Besdo, D.: Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. Acta Mechanica **20** (1974), 105-131.

[2] de Boer, R.: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin 1982.

[3] de Borst, R.: Numerical modelling of bifurcation and localisation in cohesive-frictional materials. Pageoph. **137** (1991), 368-390.

[4] de Borst, R.: A generalisation of J_2-flow theory for polar continua. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **103** (1993), 347-362.

[5] Cosserat, E., Cosserat, F.: Théorie des Corps Déformable. A. Hermann et Fils, Paris 1909.

[6] Cundall, P. A., Strack, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblages. Géotechnique **29** (1979), 47-65.

[7] Diebels, S.: A Micropolar Theory of Porous Media: Constitutive Modelling. Transport in Porous Media, accepted for publication, 1998.

[8] Diebels, S.: Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien. Habilitaionsschrift. Bericht Nr. II-4, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart 2000.

[9] Diebels, S., Ehlers, W.: On basic equations of multiphase micropolar materials. Technische Mechanik **16** (1996), 77-88.

[10] Ehlers, W.: Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 47, Universität-GH-Essen 1989.

[11] Ehlers, W.: Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien. Technische Mechanik **16** (1996), 63-76.

[12] Ehlers, W., Volk, W.: On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar solid materials, Int. J. Solids Structures **35** (1998), 4597-4617.

[13] Eringen, A. C.: Simple Microfluids. Int. J. Engng. Sci **2** (1964), 205-217.

[14] Eringen, A. C., Kafadar, C. B.: Polar field theories, in A. C. Eringen (ed.): Continuum Physics, Vol. IV, Academic Press, New York 1976, pp. 1-73.

[15] Günther, W.: Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft **10** (1958), 195-213.

[16] Haupt, P.: Foundations of continuum mechanics, in K. Hutter (ed.): Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics, CISM Courses and Lecture Notes No. 337. Springer-Verlag, Wien 1993, pp. 1-77.

[17] M. Lätzel, S. Luding, and H. J. Herrmann: Macroscopic material prperties from quasi-static, microscopic simulations of a two-dimensional shear cell. Granular Matter **2**, 123 (2000),

[18] M. Lätzel, S. Luding, and H. J. Herrmann: From discontinuous models towards a continuum description, in *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive Frictional Materials*, edited by P. A. V. et al. (Springer, Berlin, 2001), pp. 215–230.

[19] Mühlhaus, H.-B., Vardoulakis, I.: The thickness of shear bands in granular materials. Géotechnique **37** (1987), 271-283.

[20] Schröder, J.: Homogenisierungsmethoden der nichtlinearen Kontinuumsmechanik unter Beachtung von Stabilitätsproblemen, Habilitationsschrift, Bericht Nr. I-7, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart 2000.

[21] Steinmann, P.: Lokalisierungsprobleme in der Plasto-Mechanik. Dissertation, Universität Karlsruhe 1992.

[22] Steinmann, P.: A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity. Int. J. Solids Structures **31** (1994), 1063-1084.

[23] Steinmann, P., Stein, E.: A unifying treatise of variational principles for two types of micropolar continua. Acta Mechanica **121** (1997), 215-232.

[24] Steinmann, P., Willam, K.: Localization within the framework of micropolar elasto-plasticity, in V. Mannl, J. Najar, O. Brüller (eds.): Advances in Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin 1991, pp. 296-313.

[25] Volk, W.: Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens mikropolarer poröser Medien mit Hilfe der Cosserat-Theorie. Disseration. Bericht Nr. II-2, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart 1999.