Kapitel 8

Analyse von Meßsignalen

Der Inhalt der folgenden Abschnitte über Integraltransformationen läßt sich in ähnlicher oder gleicher Darstellung im Skript *Elektronische Meßtechnik II* von H.-J. Bauer, Fassung vom Sommersemester 1994, im *Taschenbuch der Mathematik*, Verfasser Bronstein und Semendjajew, in *Numerical Recipes* und weiteren Werken nachlesen.

8.1 Klassifikation

In der Praxis vorkommende Signale lassen sich für unsere Zwecke durch einige Eigenschaftspaare charakterisieren:

analog — digital: der Zeitverlauf einer elektrischen Spannung oder eines Stromes in einer elektronischen Schaltung ist im Rahmen der üblichen Meßtechnik eine Größe, die für alle Punkte in einem bestimmten Zeitintervall definiert ist und kontinuierlich die Werte eines bestimmten "dichten" Wertebereiches $\subset \mathbb{R}$ annimmt. Das Vorkommen aller Werte aus diesem Bereich kennzeichnet das Signal als analog. Ein digitales Signal hingegen nimmt, bedingt durch die Repräsentation durch Zahlen mit endlicher Stellenzahl, nur bestimmte diskrete Werte an (häufig sind das nur zwei verschiedene Werte).

kontinuierlich — abgetastet: Bei *kontinuierlichen* Signalen ist für beliebige Zeitpunkte t ein Wert gegeben, bei *abgetasteten* nur für die Abtastzeitpunkte. Digitale Signale sind stets auch abgetastet.

deterministisch — stochastisch: Bei deterministischen Signalen ist der Signalverlauf $f(t)$ "genau" bekannt (d.h. in der Regel in Rahmen der Meßgenauigkeit reproduzierbar), während bei stochastischen Signalen ein statistischer Prozeß mit im Spiel ist

reale Signale	Modelle von Signalverläufen
endliche Signaldauer	unendlich andauernd
endliche Signalamplituden	unbegrenzte Signalamplituden (δ-Impulse)
endliche Signalansstiegszeiten	senkrechte Signalflanken
	periodische Signale
endlicher Energieinhalt	unbegrenzter Energieinhalt

Tabelle 8.1: Häufig anzutreffende Annahmen bei Signalmodellierungen gegenübergestellt den Eigenschaften realer Signale.

(Rauschen). Solche Signale können nicht durch ihren Zeitverlauf, sondern müssen durch allgemeinere Eigenschaften charakterisiert werden.

Für die theoretische Betrachtung muß man häufig vereinfachende Annahmen machen, die auf reale Signale nur in begrenzter Weise zutreffen. Die Tabelle 8.1 listet einige der häufigsten Annahmen auf.

8.2 Kontinuierliche, periodische Signale

Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(t)$ mit der Eigenschaft, daß $f(t+T) = f(t)$ für alle t, heißt periodisch mit der Periode T. Wir wollen in der Regel immer das kleinstmögliche positive T verwenden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dann Funktionen betrachten, die im Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert und 2π-periodisch sind. Jede periodische Funktion $f(t)$ läßt sich durch reines Skalieren ihres Argumentes auf diesen Bereich einschränken $\tilde{f}(t') = f(\frac{T}{2\pi}t')$.

Jede periodische Funktion $f(t)$ gegeben auf $[-\pi, \pi]$ kann als eine *Fourierreihe* dargestellt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt. \tag{8.1}$$

Die Variablen a_n und b_n und heißen *Fourierkoeffizienten.*

Die Konvergenz der Fourier-Entwicklung im quadratischen Mittel ist für alle Funktionen gesichert, für die die bestimmenden Integrale der Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \tag{8.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \tag{8.3}$$

definiert sind. Dies wird in der Funktionalanalysis (siehe Quantenmechanik-Vorlesungen) in allgemeinerem Zusammenhang gezeigt. Die genaue Aussage ist dort, daß die Partialsummen $f_N(t)$,

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt \tag{8.4}$$

im quadratischen Mittel gegen $f(t)$ konvergieren, d.h., daß die "Summe der Fehlerquadrate" (die sogenannte L_2-Norm der Differenz) für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_N(t)|^2 \, dt = 0. \tag{8.5}$$

Ein wenig schärfer gefaßt ist der *Satz von Dirichlet:* Sei $f(t)$ eine Funktion solcherart, daß sich das Intervall $[-\pi, \pi]$ zerlegen läßt in endlich viele Teilintervalle, in denen $f(t)$ stetig und monoton ist und existieren weiterhin an jeder Unstetigkeitsstelle x_0 die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $f(t-0)$, $f(t-0)$, dann konvergiert die Fourierreihe $f_N(t)$ gegen $f(t)$, wo $f(t)$ stetig ist und gegen $(1/2)(f(t+0) + f(t-0))$ an den Unstetigkeitsstellen. Denkt man sich $f(t)$ außerhalb $[-\pi, \pi]$ fortgesetzt, so gilt die Aussage des Dirichlet'schen Satzes für alle t.

Die Fourierkoeffizienten haben anschauliche Bedeutungen. So ist z.B. $a_0/2$ die "Gleichkomponente," der zeitliche Mittelwert des Signals. Sei etwa $f(t) = f_0 = const$, dann ist

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt \, f_0 = f_0. \tag{8.6}$$

Der Koeffizient a_1 beschreibt den symmetrischen/geraden Anteil der "Grundschwingung" $\cos t$, b_1 den ungeraden Anteil $\sin t$, usw.

Die Fourierreihe (8.1) vereinfacht sich stark, wenn die zu entwickelnden Funktionen bestimmte Symmetriekriterien erfüllen. Ist z.B. $f(t)$ gerade, d.h. symmetrisch zur y-Achse, so daß $f(t) = f(-t)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t)\cos nt \\ &= (1/\pi)\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos nt + (1/\pi)\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt \\ &= (1/\pi)\int_{0}^{\pi} f(-t)\cos(-nt) + (1/\pi)\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt = \\ &= (2/\pi)\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt, \qquad (8.7) \\ b_n &= (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t)\sin nt \\ &= (1/\pi)\int_{0}^{\pi} f(-t)\sin(-nt) + (1/\pi)\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt \\ &= 0. \qquad (8.8) \end{aligned}$$

Mit anderen Worten verschwinden alle b_n als Koeffizienten ungerader Terme. Analog findet man für ungerade $f(t) = -f(-t)$, daß alle a_n gleich 0 sind, während jetzt die $b_n = (2/\pi)\int dt\, f(t)\sin nt$ nicht mehr verschwinden.

Als Beispiel soll hier die Konvergenz der Entwicklung eines ungeraden Rechteckimpulses $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \le t \le 0 \\ +1, & 0 < t \le \pi \end{cases} \qquad (8.9)$$

gezeigt werden. Dessen Fourierentwicklung beinhaltet nur die b_n für ungerades n und lautet

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t. \qquad (8.10)$$

Die Funktion $f(t)$ und einige der ersten Partialsummen der Fourierreihe sind in Abb. 8.1 dargestellt.

Als weitere Beispiele seien die Entwicklungen für die ungerade fortgesetzte Dreiecksfunktion $f(t) = t, 0 \le t < \pi/2,\ \ f(t) = \pi - t, \pi/2 \le t \le \pi$ genannt (Abb. 8.2a),

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t - \frac{sin3t}{3^2} + \frac{sin5t}{5^2} - \dots\right), \qquad (8.11)$$

sowie für diejenige Funktion, die aus der ungeraden Fortsetzung des Parabelbogens $(1/2)t(\pi - t), 0 \le t \le \pi$ entsteht (Abb. 8.2b):

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2n-1)t}{(2n-1)^3}. \qquad (8.12)$$

An diesen Entwicklungen kann man gut sehen, daß die Fourierreihen umso besser konvergieren, je "glatter" die zu entwickelnde Funktion ist und je näher sie bereits an einer harmonischen Funktion liegt.

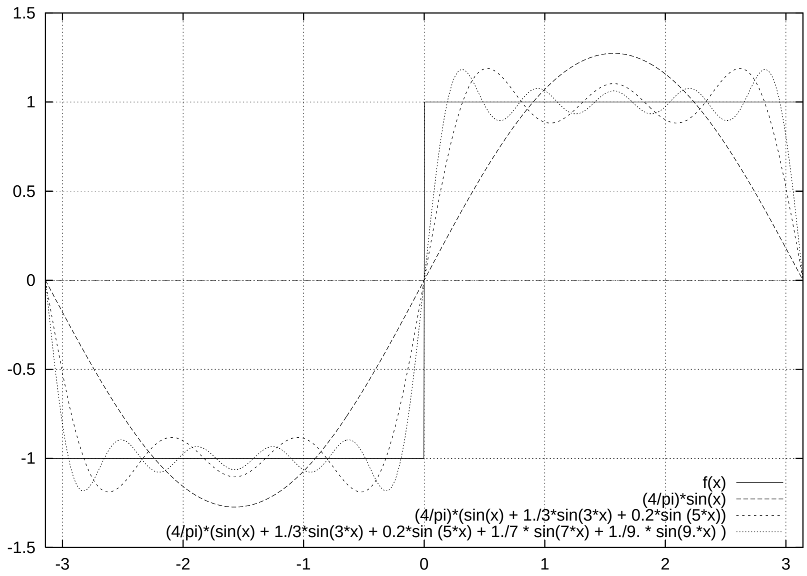

Abbildung 8.1: Rechteckfunktion $f(t)$ und Fourierreihen-Partialsummen gemäß (8.10) für $n = 1, 3, 5$. Man sieht ein Überschwingen der Entwicklung an der Sprungstelle $t = 0$ von $f(t)$. Gemäß des Satzes von Dirichlet nimmt die Entwicklung dort den Mittelwert der beiderseitigen Grenzwerte an, hier ist sogar für alle N der Wert $f_N(t = 0) = 0$.

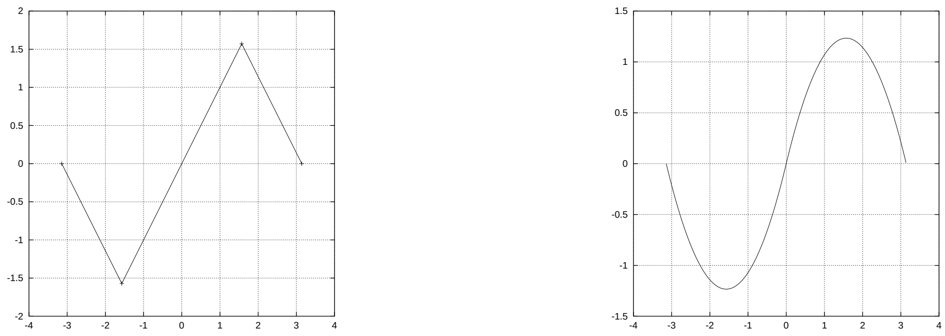

Abbildung 8.2: Ungerade fortgesetzte (a) Dreiecksfunktion $f(t) = t, 0 \leq t < \pi/2, \quad f(t) = \pi - t, \pi/2 \leq t \leq \pi$ und (b) Parabelbogen $(1/2)t(\pi - t), 0 \leq t \leq \pi$

8.2.1 Fourier-Approximation vs. Interpolation

Bricht man wie im Beispiel eine Fourier-Entwicklung nach einer bestimmten Anzahl von Gliedern ab, so erhält man eine *Approximation* der vorgegebenen Funktion $f(t)$. Im Gegensatz zu den *Interpolationen*, die im vorigen Kapitel beschrieben wurden, kann nicht garantiert werden, daß die Funktionswerte wirklich an einigen Stellen angenommen werden. Häufig ist jedoch gar keine exakte Repräsentation gefragt, sondern nur eine gute Annäherung in einem bestimmten Intervall. Insbesondere ist bei Fourierentwicklungen kein Punkt des Intervalles gegenüber einem anderen ausgezeichnet. Dies ist ein besonderer Vorteil gegenüber Taylor-Approximationen, die nur lokale Entwicklungen in einem einzelnen Punkt sind. Weiterhin verhält sich die Fourierreihe sehr gutmütig in der Gegenwart von Unstetigkeitsstellen, was häufig numerisch von Vorteil sein kann.

8.2.2 Komplexe Fourierreihen

Es liegt nahe, die cos und sin Terme der reellen Fourierreihen zu komplexen Exponentialfunktionen zusammenzufassen. Um zu erreichen, daß Linearkombinationen von solchen komplexen Exponentialfunktionen reell werden, müssen wir in der Regel zulassen, daß die Koeffizienten komplex sind. Weiterhin müssen wir negative Frequenzen berücksichtigen, denn z.B. ist

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \tag{8.13}$$

nur durch Kombination von Frequenz 1 und -1 zu erreichen. Wir wollen im weiteren auch allgemein komplexe Funktionen $f(t)$ zulassen. Der Ansatz für die komplexe Fourierreihe lautet daher

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \tag{8.14}$$

Durch Ausschreiben der Terme nach der Euler-Beziehung und Zusammenfassen der Terme für n und $-n$ findet man

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + c_{-n}) \cos nt + i(c_n - c_{-n}) \sin nt. \tag{8.15}$$

Damit ergibt sich für die Beziehungen der Koeffizienten der Fourier-Sinus- und -Cosinus-Reihe

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}). \end{aligned}$$

Formt man diese Beziehungen zu den komplexen Koeffizienten um, so wird

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0/2 \\ c_n &= (a_n - ib_n)/2 \\ c_{-n} &= (a_n + ib_n)/2. \end{aligned}$$

Für reelle Funktionen sind natürlich die a_n und b_n reell und man liest ab, daß die Koeffizienten zu positiven und negativen Frequenzen zueinander konjugiert komplex sind: $c_{-n} = \overline{c_n}$. Weiterhin sieht man, daß die c_n aus dem Integral

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \tag{8.16}$$

bestimmt werden können.

Wir listen jetzt noch einige Eigenschaften der c_n für spezielle Funktionsverläufe $f(t)$ auf:

1. *für gerade Funktionen $f(t)$ gilt $c_n = c_{-n}$*. Mit Hilfe der Substitution $t \to -t$ findet man

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t) e^{-int} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t) e^{int} = c_{-n}.$$

2. *für ungerade Funktionen $f(t) = -f(-t)$ gilt $c_n = -c_{-n}$*. Der Nachweis verläuft wie für gerade Funktionen.

3. Wie bereits oben erwähnt, gilt für reelle Funktionen $f(t) = \overline{f}(t)$ auch $c_n = \overline{c_{-n}}$, wie man auch direkt nachweisen kann,

$$\overline{c_{-n}} = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t) e^{int}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t) e^{-int} = c_n.$$

8.3 Fouriertransformation

8.3.1 Herleitung/Definition

Wir verallgemeinern zunächst die komplexen Fourierreihen auf das Intervall $[-T/2, T/2]$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\frac{2\pi}{T}t} \tag{8.17}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\, dt \tag{8.18}$$

Setzt man in diesen Beziehungen $\omega = n\Delta\omega = n\frac{2\pi}{T}$, mit $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, so kann man zunächst die Bestimmung der Koeffizienten umschreiben zu

$$g(\omega) = c_n \frac{T}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \tag{8.19}$$

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} g(\omega) = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(\omega) = \Delta\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(\omega). \tag{8.20}$$

Damit erhält man für die Entwicklung von $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega\, g(\omega)\, e^{i\omega t} \tag{8.21}$$

Führt man jetzt den Grenzübergang $T \to \infty$ aus, dann verwandelt sich die Summe in ein Integral und der Wert $\Delta\omega$ geht über in ein Differential,

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{8.22}$$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{8.23}$$

Die erste dieser Beziehungen heißt Fourier-Rücktransformation, die zweite definiert die Fouriertransformierte der Funktion $f(t)$.

Damit die obigen Integrale wohldefiniert sind, fordert man in der Regel, daß das Signal $f(t)$ quadratintegrabel ist, d.h. $\int dt\, |f(t)|^2 < \infty$. Dies ist insbesondere für reale, zeitlich begrenzte Signale immer erfüllt. Für Modellsignale wie die im vorigen Abschnitt besprochenen periodischen Funktionen ist das jedoch nicht gegeben. Eine Möglichkeit, die obigen Beziehungen zu retten, besteht darin, die Signale einfach bei einem großen T abzuschneiden. Dann führt man alle Rechnungen wie gewohnt durch, mit einer expliziten T-Abhängigkeit während der gesamten Rechnung. Am Schluß führt man dann den Übergang $T \to \infty$ durch.

Wir werden auf diesen und ähnliche Fälle und geeignetere formale Mittel in späteren Abschnitten noch zurückkommen.

8.3.2 Eigenschaften der Fouriertransformation

1. *Linearität* (Eigenschaft der Definition über ein Integral)

$$\mathcal{F}(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) = a_1 \mathcal{F}(f_1) + a_2 \mathcal{F}(f_2) \tag{8.24}$$

2. *Reziprozität* (Nachweis durch Variablensubstitution)

$$\mathcal{F}(f(\alpha t))(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} (\mathcal{F} f) \left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \tag{8.25}$$

Je lokalisierter also die Funktion $f(t)$ ist, desto breiter ist $g(\omega)$, also das “Spektrum der Frequenzen,” das man zu ihrer Darstellung braucht. In der Quantenmechanik wird sich dies in der *Unschärferelation* ausdrücken.

3. *Verschiebung im Zeitbereich* (Variablensubstitution)

$$\mathcal{F}(f(t-t_0))(\omega) = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}(f(t))(\omega) \tag{8.26}$$

4. *Modulationssatz* (Variablensubstitution)

$$\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t}f(t))(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega-\omega_0) \tag{8.27}$$

Niederfrequente Nutzsignale $f(t)$ werden häufig hochfrequenten Trägersignalen $e^{i\omega_0 t}$ aufmoduliert. Das Nutzsignal wird dadurch in den hochfrequenten Bereich verschoben.

5. *Symmetrien*

		$f(t)=f(-t)$	$f(t)=-f(-t)$
$f(t)$ komplex		$\mathcal{F}(f)(\omega)=\mathcal{F}(f)(-\omega)$	$\mathcal{F}(f)(\omega)=-\mathcal{F}(f)(-\omega)$
$f(t)$ reell	$\mathcal{F}(f)(\omega)=\overline{\mathcal{F}(f)}(-\omega)$	$\mathcal{F}(f)(\omega)$ reell, gerade	$\mathcal{F}(f)(\omega)$ imaginär, ungerade

6. *Zeitumkehr*

$$\mathcal{F}(f(-t)) = (\mathcal{F}f)(-\omega) \tag{8.28}$$

7. *Differentiation im Zeitbereich*

$$\mathcal{F}(f'(t)) = i\omega(\mathcal{F}(f))\,(\omega) \tag{8.29}$$

Diese Beziehung spielt eine herausragend wichtige Rolle bei der Lösung partieller und gewöhnlicher Differentialgleichungen weil die Differentiation in eine einfache Multiplikation übergeht. Im Frequenzraum lassen sich so Lösungen sehr häufig zumindest formal finden, die dann nach Rücktransformation (falls möglich analytisch, sonst numerisch) die Lösung der Differentialgleichung bilden.

8.3.3 Kreuz- und Autokorrelationsfunktion

Bei der Analyse der Ergebnisse einer Messung tritt häufig die Frage auf, ob zwei Größen in Abhängigkeit voneinander stehen. Statistisch gesehen, möchten wir wissen, ob die Größen voneinander unabhängig sind. Ein Spielkasinobesitzer gewordener Physiker könnte sich beispielsweise fragen: Ist die relative Häufigkeit des Auftretens von Sechsen n_6 beim Werfen eines inhomogenen Metallwürfels korreliert mit der Stärke eines außen anliegenden Magnetfeldes B?

Hierzu könnte er den Mittelwert des Produktes $\langle n_6 B\rangle$ auswerten und mit dem Produkt der Mittelwerte $\langle n_6\rangle\langle B\rangle$ vergleichen. Sind diese beiden Größen gleich, so nennt man h_6 und B statistisch unabhängig/unkorreliert.

Für den *Zeitverlauf* zweier Größen $f(t)$ und $g(t)$ können wir fragen, ob die Werte von f zur Zeit t und g zu einem anderen, früheren Zeitpunkt $t-\tau$ miteinander korreliert sind. Wir ersetzen die Mittelwertbildung durch ein Integral und definieren die Kreuzkorrelationsfunktion durch

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f,g)(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t-\tau)\, dt && (8.30)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)\, g(t)\, dt. && (8.31) \end{aligned}$$

Beide Definitionen sind äquivalent. Die Kreuzkorrelationsfunktion besitzt als Argument natürlich die gegenseitige Verschiebung τ der beiden Funktionen. Die Kreuzkorrelation zweier Funktionen kann man sich anschaulich als den Überlapp beider Funktionen vorstellen, wie das in der Abb. 8.3 verdeutlicht ist.

Die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion berechnen wir so:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{C}(f,g))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t+\tau)\, g(t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t')\, g(t) e^{-i\omega(t'-t)}\\ &= \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{-i\omega t'}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, g(t) e^{i\omega t}\right)\\ &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(g)(-\omega). && (8.32) \end{aligned}$$

Sie ergibt sich also als das Produkt der Transformierten von f und g an den Stellen ω und $-\omega$. Für reelle Funktionen $g(t)$ gilt $\mathcal{F}(g)(-\omega) = \overline{\mathcal{F}(g)}(\omega)$, so daß $\mathcal{F}(\mathcal{C}(f,g))(\omega) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\omega)\overline{\mathcal{F}(g)}(\omega)$.

Aufgrund der obigen Definition kann man auch eine *Autokorrelationsfunktion* $\mathcal{C}(f,f)$ einer Funktion $f(t)$ mit sich selbst einführen. Falls $f(t)$ reell ist, gilt aufgrund von (8.32)

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}(f,f))(\omega) = \sqrt{2\pi}|\mathcal{F}(f)(\omega)|^2. \qquad (8.33)$$

Diese Beziehung ist auch unter der Bezeichnung *Wiener-Khinchin-Theorem* bekannt.

Die Autokorrelationsfunktion hat folgende Eigenschaften, die aus ihrer Definition ersichtlich sind,

1. *Symmetrie:* $\mathcal{C}(f,f)(\tau) = \mathcal{C}(f,f)(-\tau)$, daher werden Autokorrelationsfunktionen nur für positive τ angegeben,

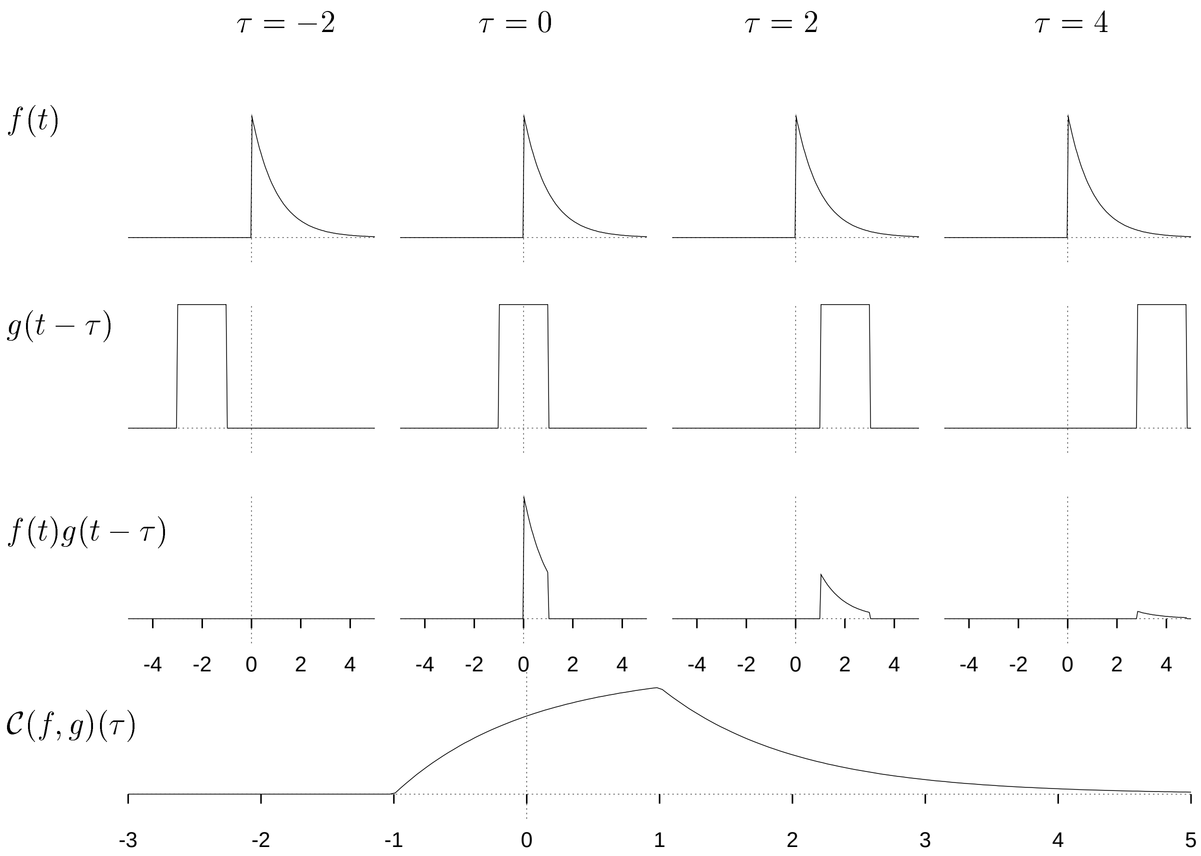

Abbildung 8.3: Die Kreuzkorrelation $\mathcal{C}(f,g)(\tau)$ zweier Funktionen läßt sich durch den Überlapp einer der Funktionen mit einer verschobenen Version der anderen verdeutlichen. Oben sind für verschiedene Werte des Parameters τ in der ersten Zeile die Funktionen $f(t) = \theta(t)e^{-t}$ und in der zweiten $g(t-\tau)$, $g(t) = \theta(t+1) - \theta(t-1)$ aufgetragen. Die dritte Zeile enthält das Produkt dieser beiden, dessen Integral schließlich den Wert der Kreuzkorrelation für diesen einen speziellen Wert von τ festlegt. Der Verlauf der Kreuzkorrelationsfunktion für alle τ, die sich in diesem Falle zu $\exp(x+1)\theta(-x-1) - \theta(-x-1) - \exp(x-1)\theta(-x+1) + \theta(-x+1)$ bestimmt, ist als Funktionsverlauf ganz unten angegeben.

2. *Varianz:* Der Funktionswert $\mathcal{C}(f,f)(0) = \int f^2(t)dt$ ist ein Maß für die Variabilität des Signals, in Analogie zur Varianz $\langle\zeta^2\rangle - \langle\zeta\rangle^2$ einer Zufallsvariablen ζ. Da für quadratintegrable Funktionen strenggenommen allerdings immer der Mittelwert $\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)$ verschwindet, bleibt nur der der Mittelwert des Quadrates $\langle\zeta^2\rangle$ übrig.

3. *Unkorreliertheit bei langen Zeiten:* Reale Signale verlieren für große Zeitzwischenräume τ ihre Kohärenz, das Signal "vergißt" sozusagen seine Vergangenheit. Außer im Falle von Modellsignalen wie beispielsweise $f(t) = \sin t$ strebt daher $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(f,f)(\tau)$ gegen 0.

Korrelationszeit eines Signales

Häufig kann man eine Autokorrelationszeit τ_c definieren, die die Zeitkonstante des "Gedächtnisses" des Signals charakterisiert. Je nach Verlauf des Signales $f(t)$ kann sich dazu eignen

1. der Wert von τ, zu dem $\mathcal{C}(f,f)(\tau)$ auf einen Bruchteil $1/e$ des Wertes $\mathcal{C}(f,f)(0)$ abgefallen ist.

2. unter der Annahme, daß die Abnahme von $\mathcal{C}(f,f)(\tau)$ effektiv exponentiell erfolgt $= \mathcal{C}(f,f)(0)e^{-\tau/\tau_c}$ kann man das Integral $\int \mathcal{C}(f,f)(\tau)\, d\tau$ einmal aus dieser einfachen Beziehung zu $\tau_c\mathcal{C}(f,f)(0)$ bestimmen, andererseits aber auch (in der Regel numerisch) aus dem wirlichen Verlauf von $\mathcal{C}(f,f)(\tau)$. Der Vergleich liefert τ_c.

3. Für Funktionen mit "Durchschwinger" kann man ein τ_c manchmal schon durch Ermitteln der ersten Nullstelle von $\mathcal{C}(f,f)(\tau)$ gewinnen.

8.3.4 Autokorrelation zur Rauschunterdrückung

Stellen wir uns ein Signal vor, das aus einem Nutzanteil $s(t)$ und "Rauschen" $\eta(t)$ zusammengesetzt ist. Unabhängig von der physikalischen Ursache dieses Rauschens wollen wir es durch seine statistischen Eigenschaften definieren.

Statistisch gesehen verschwindet die Kreuzkorrelation von Signal und Rauschen, wenn es sich um zwei unabhängige Prozesse handelt. Diese Aussage setzt voraus, daß die Beobachtungszeit und die Dauer des Nutzsignales lang genug sind. Anschaulich benötigt man ein "Herausmitteln" der Rauschanteile zu verschiedenen Zeitpunkten. Das heißt, daß im Korrelationsintegral die Produkte $s(t)\eta(t-\tau)$ wegen des ständig wechselnden Vorzeichens von $\eta(t)$ als stochastische Beiträge auftreten. Wenn wir uns der Einfachheit halber das Kreuzkorrelationsintegral als *Summe* über einzelne Beiträge vorstellen, dann können wir unser Wissen aus dem Kapitel über stochastische Integration anwenden, daß nämlich eine Summe über solche Beiträge wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der

Beiträge wächst. Im Vergleich dazu wächst das Autokorrelationsintegral des Signales direkt proportional zur Anzahl der Beiträge. Relativ und für genügend lang andauernde Signale gesehen, kann daher die Kreuzkorrelation $\mathcal{C}(s,\eta)(\tau)$ gegen die Autokorrelation $\mathcal{C}(s,s)(\tau)$ vernachlässigt werden.

Gleichermaßen werden wir annehmen, daß die Autokorrelation des Rauschsignals verschwindet, außer an der Stelle $\tau = 0$, wo ein Wert proportional zum Quadrat der Amplitude des Rauschens angenommen wird. Das nötige Argument ist die Unabhängigkeit des Rauschsignals zu zwei verschiedenen Zeitpunkten, die erlaubt, das gleiche Argument wie im vorigen Abschnitt anzuwenden und die Autokorrelation für $\tau > 0$ gegen die bei $\tau = 0$ zu vernachlässigen, bei der alle Beiträge das gleiche positive Vorzeichen haben.

Bilden wir jetzt die Autokorrelation des Signales, so ergibt sich (Einsetzen in die Definition, Unterdrücken des Argumentes τ)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(s+\eta, s+\eta) &= \mathcal{C}(s,s) + \mathcal{C}(s,\eta) + \mathcal{C}(\eta,s) + \mathcal{C}(\eta,\eta) \\ &= \mathcal{C}(s,s) + \mathcal{C}(\eta,\eta). \end{aligned} \tag{8.34}$$

Das bedeutet, daß man außer bei $\tau = 0$, wo der zweite Term einen Beitrag liefert, die Autokorrelationsfunktion des ursprünglichen, unverrauschten Signales gewinnt.

Als ein Anwendungsbeispiel für das oben Gesagte zeigen wir in Abb. 8.4 die ersten 100 Werte einer Zeitreihe $f(t)$, die durch Abtasten gewonnen ist und deren Autokorrelation für $\tau \leq 100$, ermittelt über ein Zeitfenster von 10000 Abtastungen.

8.3.5 Faltung

In sehr enger Beziehung zur Definition der Kreuzkorrelation steht die Faltung, die sich nur im Vorzeichen des zweiten Integranden von der Korrelation unterscheidet,

$$f \odot g(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} dt\, f(t) g(\tau - t). \tag{8.35}$$

Mit einer zu (8.32) exakt parallelen Begündung läßt sich zeigen, daß die Fouriertransformierte des Faltungsproduktes zweier Funktionen bis auf einen konstanten Vorfaktor gleich dem Produkt der Fouriertransformierten ist

$$\mathcal{F}(f \odot g)(\omega) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(g)(\omega) \tag{8.36}$$

Im Gegensatz zur Beziehung für die Kreuzkorrelation taucht jetzt hier im Argument von $\mathcal{F}(g)$ kein negatives Vorzeichen mehr auf. Die Beziehung (8.36) trägt die Bezeichnung *Faltungssatz.*

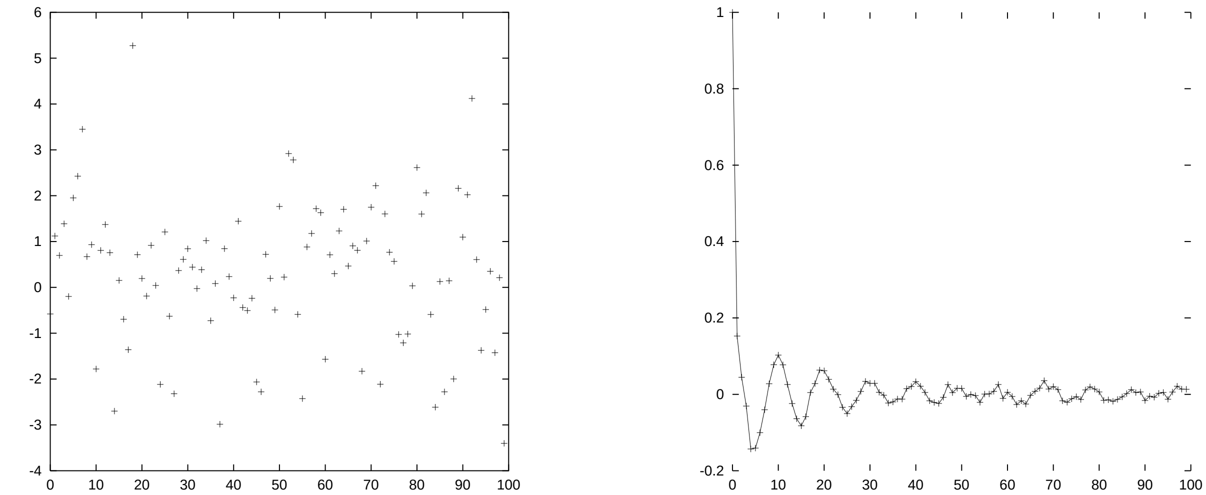

Abbildung 8.4: Links: Die ersten 100 Werte eines verrauschten Signales $s(t) + \eta(t)$. Rechts: Autokorrelationsfunktion dieses Signales über 10000 Abtastpunkte. Hier sind sowohl klare Rauschunterdrückungseffekte zu sehen als auch die vom Rauschen herrührende Überhöhung bei $\tau = 0$. Ebenso sieht man, daß das Ausgangssignal keine "langreichweitige" Korrelation hat, sondern seinen Anfangszustand nach etwa $t_c \approx 60 \ldots 80$ Abstastintervallen vergessen hat.

8.3.6 Faltungssatz und lineare Systemtheorie

Der Faltungsproduktes ist zentral für die Theorie linearer, zeitinvarianter Systeme. Diese sind dadurch charakterisiert, daß sie auf ein gegebenes Eingangssignal immer (Zeitinvarianz) mit einem bestimmten Signal am Ausgang "antworten." Summe und Vielfache von Eingangssignalen führen auf entsprechende Summen und Vielfache der Ausgangssignale (Linearität).

Relativ einfach zu messen ist die sogenannte Sprungantwort $\tilde{h}(t)$ des Systems auf eine $\theta(t)$ Funktion am Eingang,

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \tag{8.37}$$

sozusagen der "Einschaltknacks" des Systems. Um jetzt die Antwort des Systems auf beliebige Eingangssignale $f(t)$ zu bekommen, müssen wir $f(t)$ in eine Summe von θ-Funktionen zerlegen. Wir wollen dies durch einen Grenzübergang einer abgetasteten Version von $f(t_i)$ für $\Delta t = t_{i+1} - t_i \to 0$ erreichen. Im Zeitintervall $t_{i-1} < t \leq t_{i+1}$ etwa ist $f(t)$ die Summe zweier Rechteckimpulse, die wir aus θ-Funktionen zusammensetzen können,

$$\begin{aligned} f(t) \approx \theta(t - t_{i-1}) f(t_{i-1}) \quad &- \quad \theta(t - t_i) f(t_{i-1}) && (8.38) \\ &+ \quad \theta(t - t_i) f(t_i) - \theta(t - t_{i+1}) f(t_i) && (8.39) \end{aligned}$$

Wenn wir die Terme nach den $\theta(t-t_i)$ ordnen und die Summe von $-\infty$ bis ∞ erstrecken, dann wird

$$f(t) \approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} \theta(t-t_i)\,(f(t_i) - f(t_{i-1})) \tag{8.40}$$

Durch Einfügen von Δt erhalten wir eine Summation, die für $\Delta t \to 0$ in ein Integral übergeht,

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta t\,\theta(t-t_i)\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{\Delta t} \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\theta(t-t')\,\frac{d}{dt'}f(t'). \end{aligned} \tag{8.41}$$

Aus dieser Darstellung erhalten wir die Systemantwort $F(t)$ auf $f(t)$ als Eingangssignal, indem wir unter Ausnutzung der Linearität die $\theta(t-t')$ durch $\tilde{h}(t-t')$ ersetzen:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\tilde{h}(t-t')\frac{d}{dt'}f(t'). \tag{8.42}$$

Hier erkennt man unschwer eine Faltung wieder. Unter Ausnutzung des Faltungssatzes und des Verhaltens der Fouriertransformierten von Ableitungen findet man

$$\mathcal{F}(F)(\omega) = i\omega\mathcal{F}(\tilde{h})(\omega)\mathcal{F}(f)(\omega). \tag{8.43}$$

Noch einfacher wird diese Beziehung, wenn wir im Zeitraum die auf $f(t')$ wirkende Ableitung in (8.41) zunächst *rein formal* durch partielle Integration auf die θ Funktion überwälzen. Hierbei ist zu beachten, daß t' mit negativem Vorzeichen in $\theta(t-t')$ auftaucht, also

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\frac{d}{dt'}\theta(t-t')f(t'). \tag{8.44}$$

Diese formale Ableitung der θ Funktion hat also die Eigenschaft, bei Integration gerade den Wert des Koeffizienten an der Sprungstelle t' zu liefern. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Dirac δ-“Funktion.” Somit haben wir eine *Darstellung (von vielen) der δ-Funktion* gefunden,

$$\delta(t) = \theta'(t), \quad \text{also} \tag{8.45}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\,f(t')\delta(t-t'). \tag{8.46}$$

Mathematisch müssen wir implizit immer einen Rückbezug auf die Integraldarstellung (8.41) machen, um Ausdrücke auszuwerten, die δ Funktionen enthalten. In vielen Fällen reicht aber die Rechenregel (8.46) aus.

Ein System antworte auf einen δ-Impuls mit der *Impulsantwort* $h(t)$. Wegen der Zerlegung (8.46) von $f(t)$ gilt

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, h(t-t')f(t') \tag{8.47}$$

für die Antwort auf $f(t)$. Aus dem Faltungssatz folgt jetzt die zentrale Aussage, daß die Fouriertransformierte der Antwort gleich dem Produkt der jeweiligen Transformierten von Impulsantwort und Eingangsfunktion ist:

$$\mathcal{F}(F)(\omega) = \mathcal{F}(h)(\omega)\mathcal{F}(f)(\omega) \tag{8.48}$$

Durch einen Vergleich mit (8.43) finden wir $\mathcal{F}(h)(\omega) = i\omega\mathcal{F}(\tilde{h})(\omega)$, im Zeitraum ist daher die Impulsantwort die Zeitableitung der Sprungantwort.

8.3.7 Fouriertransformation der δ-Funktion

Die Fouriertransformierte der δ-Funktion ist wegen (8.46) gleich $\mathcal{F}(\delta)(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}$ also gleich einer Konstanten. Aus der Rücktransformation erhalten wir eine weitere Darstellung der δ-Funktion,

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t} \tag{8.49}$$

Multiplikation mit einer reellen Konstanten c, komplexe Konjugation und Umbenennung von t in ω und umgekehrt zeigt, daß wir damit im Prinzip eine Rechenregel für die Fouriertransformation einer Konstanten gefunden haben,

$$\sqrt{2\pi} c\delta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, c e^{-i\omega t}. \tag{8.50}$$

Wie bereits früher erwähnt, muß solchen Ausdrücken natürlich mathematisch immer ein Sinn gegeben werden. Hier z.B. kann das dadurch geschehen, daß wir den Integranden auf das Interval $[-T/2 \ldots T/2]$ einschränken, dann die Weiterrechnung ausführen (die ein Integral über die δ Darstellung beinhalten muß) und schließlich den Übergang $T \to \infty$ durchführen.

8.3.8 Spektrale Leistungsdichte

Häufig ist es von Wichtigkeit zu beurteilen, wieviel "Leistung" in einem bestimmten Bereich des Spektrums angesiedelt ist. Denken wir uns das Signal als abgegriffene Spannung, so ist die Leistung proportional zum Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, |f(t)|^2$.

Um zu einer Aussage im Frequenzraum zu kommen, schreiben wir dieses jetzt unter Benutzung der Fourierdarstellungen von $f(t)$ und $\overline{f(t)}$ als dreifaches Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\,|f(t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\mathcal{F}(f)(\omega')e^{i\omega' t}\mathcal{F}(\overline{f})(\omega)e^{i\omega t} \qquad (8.51)$$

Unter Benutzung von $\mathcal{F}(\overline{f})(\omega) = \overline{\mathcal{F}(f)}(-\omega)$ machen wir im Integral über ω die Substitution $\omega \to -\omega$ und erhalten damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\,|f(t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt\,|\mathcal{F}(f)(\omega')|^2 e^{i(\omega'-\omega)t} \qquad (8.52)$$

Die Integration über t der komplexen Exponentialfunktion ist jetzt aber nicht anderes als $2\pi\delta(\omega-\omega')$ und damit finden wir nach Integration über ω' das *Parsevalsche Theorem*

$$\int_{\infty}^{\infty} dt\,|f(t)|^2 = \int_{\infty}^{\infty} d\omega\,|\mathcal{F}(f)(\omega)|^2. \qquad (8.53)$$

Wenn wir $|\mathcal{F}(f)(\omega)|^2$ als Leistungsdichte im Frequenzraum benutzen, "verlieren" wir also keine Leistung durch die Fouriertransformation. Man betrachtet diese häufig nur für positve Frequenzen und definiert das *einseitige Leistungsspektrum* als

$$P(\omega) = |\mathcal{F}(f)(\omega)|^2 + |\mathcal{F}(f)(-\omega)|^2. \qquad (8.54)$$

Für reelle Funktionen $f(t)$ ist $|\mathcal{F}(f)(\omega)|^2$ darüberhinaus symmetrisch, so daß $P(\omega) = 2|\mathcal{F}(f)(\omega)|^2$ gilt.

8.4 Abgetastete Signale

Von jetzt an wollen wir annehmen, daß die betrachteten Signale nur zu diskreten Zeitpunkten t_i, $i = 0 \ldots N-1$ vorliegen, die äquidistant mit Δ aufeinander folgen sollen. Wir werden N als durch 2 teilbar voraussetzen. Der Einfachheit halber bezeichne auch $f_i = f(t_i)$ den Wert des Signales zum Abtastzeitpunkt t_i. Die spezielle Frequenz (hier ist wirklich Frequenz und nicht Kreisfrequenz gemeint) $f_c = 1/2\Delta$ trägt den Namen *Nyquist* Frequenz. Ihre Bedeutung wird klar, wenn man sich überlegt wie die f_i einerseits eines harmonischen Signales von genau f_c und dem einer vielfachen Frequenz nf_c aussehen. Erhl̈t man beispielsweise bei der Frequenz f_c Abtastungen gerade an den Nullstellen des Signales, so ist das auch bei allen Vielfachen dieser Frequenz der Fall. Es ist also zwar möglich, von höherfrequenten Signalen Abtastungen zu sehen, sie lassen sich jedoch nicht von Signalen unterscheiden, deren Frequenzen im Bereich bis zu f_c liegen.

Jedoch gibt es das bemerkenswerte *Abtastungstheorem:* Eine kontinuierliche Funktion, deren Frequenzspektrum auf das Intervall $[-f_c, f_c]$ beschränkt ist, ist vollständig festgelegt durch ihre Abtastwerte f_i. Eine explizite Darstellung für reelles $f(t)$ ist

$$f(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin \omega_c (t - n\Delta)}{\pi(t - n\Delta}. \tag{8.55}$$

Dem Quotienten muß für $t = m\Delta$ und $n = m$ mittels der d'Hopitalschen Regel als Grenzwert ein Sinn gegeben werden.

Störend ist natürlich, daß wir nicht vermeiden können, auch Signalanteile zu erfassen, deren Frequenz jenseits der Nyquist-Frequenz liegt, sofern sie denn im ursprünglichen Signal vorhanden sind. Wenn dies einmal passiert ist, dann gibt es keinen Weg zurück... In der Praxis muß man daher sicherstellen, daß vor dem Abtasten mit geeigneten Mitteln die Bandbreite des Signales auf die Nyquist Frequenz beschränkt wird.

8.4.1 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Wir haben oben gesehen, daß sich recht komplexe Rechenvorschriften im Zeitraum — wie beispielsweise die Berechnung von Faltungs- oder Korrelationsintegralen — auf recht einfache Vorschriften im Frequenzraum reduzieren — hier die punktweise Multiplikation der Transformierten. Nun ist die Bestimmung der Korrelationsfunktion im Zeitraum ein Algorithmus der Komplexität N^2, denn wir müssen für jedes mögliche τ (davon gibt es N) im wesentlichen N Zahlenpaare miteinander multiplizieren und aufsummieren. Falls es möglich ist, die Fouriertransformation mit einem Rechenaufwand von nicht wesentlich mehr als $\sim N$ Operationen durchzuführen, dann können wir tatsächlich vom geringeren Aufwand im Frequenzraum profitieren.

Wir wollen also zunächst eine diskrete Fouriertransformation einführen und dann deren Rechenaufwand abschätzen.

Wir betrachten die folgende Näherung der Fouriertransformation von $f(t)$

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} g(\omega_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i e^{-i\omega_k t} dt \\ &\approx \sum_{n=0}^{N-1} \Delta f_k e^{-i\frac{2\pi}{N\Delta} kn\Delta} \\ &= \Delta \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N} kn}. \end{aligned} \tag{8.56}$$

Wir bezeichnen $\frac{2\pi}{\Delta} g(\omega_k)$ als G_k und definieren damit die Rechenvorschrift (8.57)

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N} kn} \tag{8.57}$$

als diskrete Fouriertransformation (DFT). Der die Frequenz kennzeichnende Index k läuft von $0, \ldots, \pm N/2$ entsprechend den Kreisfrequenzen $0, \pm\frac{2\pi}{T}, \pm\frac{2\pi}{T} \ldots, \pm\frac{2\pi}{2\Delta} = \pm\frac{2\pi}{f}_c$. Dies sind $N+1$ Koeffizienten im Gegensatz zu den N Abtastwerten, aber man sieht leicht, daß $G_{N/2} = G_{-N/2}$, so daß tatsächlich nur N unabhängige Zahlen resultieren.

Häufig ist es praktisch, die Indizes auch im Frequenzraum ab 0 laufen zu lassen, dann aber bei $N-1$ aufzuhören. Durch Einsetzen in die Definitionsgleichung kann man sich leicht überzeugen, daß für die negativen Frequenzen $G_{-k} = G_{N-k}$ ist.

Die inverse Transformation lautet

$$f(t_n) = f(n\Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \tag{8.58}$$

Für eine mögliche Herleitung dieser Beziehung sei nur angedeutet, daß man zunächst die Darstellung des Kronecker-δ

$$\delta_{nn'} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi}{N}k(n-n')} \tag{8.59}$$

aus hintereinanderausgeführter Transformation und Rücktransformation einer Folge $f_n = \delta_n n'$ nachweisen kann. Damit folgt (8.58) durch Einsetzen der G_k aus (8.57) und Vertauschen der Summation über n' und k.

Beide Tranformationsrichtungen sind jedoch in dieser Form sehr rechenintensiv, denn jeder der N Datenpunkte erfordert N komplexe Multiplikationen und Additionen, also sind insgesamt für die Rechnung N^2 Operationen nötig. Zum gleichenResultat gelangt man, durch die Interpretation der DFT (8.57) als Matrixmultiplikation der Matrix $(e^{-i\frac{2\pi}{N}kn})_{k,n=0\ldots N-1}$ mit dem Spaltenvektor (f_n).

Im 2-dimensionalen wächst die Anzahl der Operationen wie N^4, in 3D wie N^6. Es ist daher klar, daß man ein schnelleres Verfahren braucht. Solch ein Verfahren existiert und wurde im Laufe der Geschichte der Numerik mehrfach erfunden. Es wurde bekannt durch die Arbeit von Coley and Tukey (IBM Yorktown Heights) um 1965, ist jedoch in einer eleganten Version bereits durch Danielson und Lanczos 1942 beschrieben worden.

8.4.2 Schnelle Fouriertransformation (FFT)

Bei der sogenannten schnellen Fourier-Transformation (engl. *Fast Fourier Transform* (FFT) geht man von der normalen DFT aus, zerlegt sie aber in eine Komponente mit geradem Laufindex m und in eine mit ungeradem m (s. unten). Man erhält so zwei Summen, die ihrerseits wieder DFT's eines reduzierten Problems sind. Wiederholte rekursive Anwendung dieser Technik führt auf die DFT einer einzelnen Zahl, die dann gar nicht mehr transformiert werden muß.

Wir wollen annehmen, daß die Anzahl N der zu transformierenden Punkte f_i eine Zweierpotenz ist. Dann gilt für alle $k = 0, \ldots N-1$

$$\begin{aligned}
G_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= \sum_{n \text{ gerade}}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n \text{ ungerade}}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= \sum_{n'=0}^{N/2-1} f_{2n'} e^{-i\frac{2\pi}{N/2}n'k} + \sum_{n'=0}^{N/2-1} f_{2n'+1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(2n'+1)k} \\
&= \sum_{n'=0}^{N/2-1} f_{2n'} e^{-i\frac{2\pi}{N/2}n'k} + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \sum_{n'=0}^{N/2-1} f_{2n'+1} e^{-i\frac{2\pi}{N/2}n'k} \\
&= G_k^e + (e^{-i\frac{2\pi}{N}})^k G_k^o
\end{aligned} \tag{8.60}$$

Die G_k^e und G_k^o sind dabei die Transformationen der durch die geraden bzw. ungeraden Untermengen der f_i gebildeten Folgen. Zwar läuft k für die äußere Summe von 0 bis $N-1$, aber für die beiden kürzeren Transformationen entsprechen die $k > N/2-1$ den kleineren $k' = k - N/2$.

Falls $N = 2$ wären wir jetzt bereits fertig, denn die Transformation einer Folge mit nur einem Element ist dieses Element selbst. Aus (8.60) erhalten wir dann nach Setzen von $k = 0, 1$

$$G_0 = f_0 + f_1 \tag{8.61}$$

$$G_1 = f_0 + (e^{-i\frac{2\pi}{2}})^1 f_1 = f_0 - f_1 \tag{8.62}$$

Über den Rechenaufwand können wir jetzt folgendes sagen. Die Bestimmung der G_k aus den $G_k^{e,o}$ erfordert N Operationen (bestehend aus je einer Addition und einer Multiplikation). Die $G_k^{e,o}$ sind 2 Transformationen der Länge $N/2$ und erfordern zu ihrer Bestimmung daher insgesamt wiederum N Operationen auf den $G_k^{ee,eo,oe,oo}$. Insgesamt ist die Anzahl der nötigen rekursiven Anwendungen bis hinunter zur Einpunkttransformation durch den binären Logarithmus $\log_2 N$ von N gegeben. Damit benötigt eine FFT nur $N \log_2 N$ Operationen im Vergleich zu den N^2 Operationen der einfachen DFT. Diese enorme Zeitersparnis macht die Methode sehr wichtig bei praktischen Berechnungen in den unterschiedlichsten Gebieten wie z.B. in der Elektronik, Optik und in der Quantenmechanik.

In diesem Zusammenhang sollte auch bemerkt werden, daß die FFT *in place* durchgeführt werden kann, da auf jeder Ebene die Anzahl der Komponenten der verschiedenen benötigten Transformationen gerade wieder N beträgt.

Weitere Arbeit muß bei der FFT verrichtet werden, weil die Summanden der Teilreihen bei der sukzessiven Unterteilung in nicht trivialer Art und Weise kombiniert werden müssen.

Z.B. ergibt für $N = 4$ die direkte zweimalige Anwendung von (8.60), mit der Abkürzung $W_N = \exp -i\frac{2\pi}{N}$

$$\begin{aligned} G_k = G_k^e + W_4^k G_k^o &= G_k^{ee} + W_2^k G_k^{eo} + W_4^k (G_k^{oe} + W_2^k G_k^{oo}) \\ &= f_0 + W_2^k f_2 + W_4^k (f_1 + W_2^k f_3). \end{aligned} \tag{8.63}$$

Hier kann man ablesen, daß die *eo* Kombinationen sich in die Indizes von f verwandeln lassen, indem man deren Reihenfolge umkehrt, jedes e durch eine 0 und jedes o durch eine 1 ersetzt und dann das Ergebnis als binäre Zahl liest. In der Regel werden FFT Algorithmen so aufgebaut, daß die f_i zunächst in eine Reihenfolge gebracht werden, die erlaubt, die $G_k^{..e}$ und $G_k^{..o}$ aus benachbarten Datenfeldern zu kombinieren (Bitreversal). Einzelheiten findet man in *Numerical Recipes* oder im Buch *Numerische Mathematik* von Schwarz. Hier sei nur kurz ein Beispiel einer FFT von 4 Werten angegeben mit den sich jeweils ergebenden Speicherinhalten.

$N = 1$	$N = 2, W_2 = e^{-i\pi} = -1$	$N = 3, W_3 = e^{-i\pi/2} = -i$
$G_0^{ee} = f_0$	$G_0^e = f_0 + f_2$	$G_0 = f_0 + f_2 + (f_1 + f_3)$
$G_0^{eo} = f_2$	$G_1^e = f_0 - f_2$	$G_1 = f_0 - f_2 - i(f_1 - f_3)$
$G_0^{oe} = f_1$	$G_0^o = f_1 + f_3$	$G_2 = f_0 + f_2 - (f_1 + f_3)$
$G_0^{oo} = f_3$	$G_1^o = f_1 - f_3$	$G_3 = f_0 - f_2 + i(f_1 - f_3)$

Tabelle 8.2: Beispiel einer FFT für 4 Werte. Durch geschicktes Sortieren der Daten vor Beginn der eigentlichen Rechnung kann man die Kombination immer längerer Transformationen stark vereinfachen. Außerdem ist es möglich, die Berechnung ohne zusätzliches Datenfeld von einer Stufe zur nächsten zu führen.