Kapitel 11

Lineare Algebra

In diesem Kapitel werden Operationen der linearen Algebra diskutiert, wie sie immer wieder in alltäglichen Problemen der Physik auftreten. Als Beispiele werden zuerst Matrizen (Tensoren) und deren Eigenschaften genauer diskutiert. Danach steht das Lösen linearer Gleichungssysteme, die Invertierung von Matrizen und das Finden von Eigenwerten auf dem Programm. Da viele Probleme in drei Dimensionen, oder bei Rotationssymmetrie sogar in zwei Dimensionen, formuliert sind beschränken wir uns im Folgenden auf dreidimensionale Beispiele.

11.1 Elementare Verfahren

11.1.1 Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei der allgemeine Tensor:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} . \tag{11.1}$$

Gesucht ist die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}$, wobei $\mathbf{a}$ ein bekannter Vektor und $\mathbf{x}$ der gesuchte Vektor ist. Da man ganze Zeilen mit einer Konstanten multiplizieren, und dann von einer anderen Zeile subtrahieren kann ohne das Ergebniss zu verändern, wird diese Operation im folgenden solange ausgeführt, bis eine Dreiecksmatrix verbleibt, die direkt zur Lösung des Gleichungssystems führt. Um die Elemente t_{i1} $(i > 1)$ zu entfernen subtrahiert man die mit $m_{i1} = t_{i1}/t_{11}$ multiplizierte Zeile 1 von Zeile i. Danach verfährt man in analoger Weise mit den Elementen t_{ij} $(i > j > 1)$ und erhält schließlich die Matrix:

$$\mathbf{Q} = \left(\begin{array}{ccc|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & b_1 \\ 0 & q_{22} & q_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & q_{33} & b_3 \end{array}\right) \quad , \tag{11.2}$$

wobei die Elemente q_{ij} aus den t_{ij} durch die oben beschriebenen Operationen hervorgegangen sind, z.B. $q_{22} = t_{22} - t_{12}\, m_{21}$. Man beachte, daß alle Zeilenoperationen auch auf den Vektor **a** angewendet wurden, woraus sich das Diagonal-Gleichungssystem $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ergibt. Um das Gleichungssystem zu lösen muß man nur noch von unten beginnend die Lösungen für alle x_i berechnen, d.h. $x_3 = b_3/q_{33}$, etc.

Als numerisch problematisch erweist sich dieses Verfahren, wenn der Nenner in m_{ij} klein oder Null wird, in welchem Fall man evtl. das Gleichungssystem umstellen muß. Bei großen Matrizen besteht das Hauptproblem in der Rechenzeit, da dieses Verfahren proportional zu N^3 ist, wobei N die Dimension der Matrix ist.

Die Lösung für das System

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a_1 \\ 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 2 & 0 & 2 & a_3 \end{array}\right) \tag{11.3}$$

ist

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_3 - a_1 \\ a_1 + a_2 - a_3 \\ a_1 - a_3/2 \end{pmatrix} \quad , \tag{11.4}$$

wie man (mühsam) per Hand nachrechnen kann, oder viel einfacher durch die MAPLE Kommandos

```
restart: with(linalg):
T := linalg[matrix] ( 3, 3, [ 1, 0, 2,  1, 1, 0,  2, 0, 2 ] );
a := linalg[matrix] ( 3, 1, [ a1, a2, a3 ] );
x := eval( linsolve( T, a ) );
test := multiply( T, x );
```

überprüfen kann.

11.1.2 Matrixinversion

Kennt man die Matrix $\mathbf{T}^{-1}$, für die gilt $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}$, wobei $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix mit Diagonalelementen gleich Eins ist, so hat man die sog. inverse Matrix gefunden. Das im letzten Kapitel vorgestellte Verfahren läßt sich ebenfalls zur Matrixinversion verwenden, wenn man beachtet, daß die rechte Seite nun die Einheitsmatrix ist wobei der unbekannte Vektor $\mathbf{x}$ zur gesuchten Matrix $\mathbf{T}^{-1}$ wird. Die inverse der oben als Beispiel benutzten Matrix ist

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} , \qquad (11.5)$$

wie man wieder durch Berechnung, bzw. mit MAPLE findet:

```
I1 := linalg[matrix] ( 3, 3, [ 1, 0, 0,  0, 1, 0,  0, 0, 1 ] );
T_1 := eval( linsolve( T, I1 ) );
test := multiply( T_1, T );
```

Kennt man die inverse einer Matrix, so hat man nebenbei auch das zugehörige Gleichungssystem gelöst, da $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{a}$.

11.1.3 Berechnung von Eigenwerten

Der Eigenwert einer Matrix ist der Wert λ, der die Gleichungen $\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = 0$ löst. Da das Gleichungssystem homogen ist, weiss man, daß es nur dann Lösungen gibt, wenn die Determinante $|\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ ist. Im Fall einer dreidimensionalen Matrix ergibt sich also ein Polynom dritten Grades, dessen Nullstellen die Eigenwerte λ_i ($i = 1, 2, 3$) der Matrix sind. In zwei und drei Dimensionen ist das Problem also leicht zu lösen. In höheren Dimensionen muß man allerdings oft auf numerische Methoden zurückgreifen.

Ein relativ einfaches Näherungsverfahren besteht darin, die D dimensionale Matrix $\mathbf{T}$ wiederholt (k mal) an einen zufällig gewählten Vektor $\mathbf{y}$ zu multiplizieren:

$$\mathbf{y}_k := \mathbf{T}^k \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{D} \beta_i \lambda_i^k \mathbf{x}_i \ , \qquad (11.6)$$

wobei die $\mathbf{x}_i$ die Eigenvektoren der Eigenwerte λ_i sind, d.h. $\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$. Man kann den Vektor $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{D} \beta_i \mathbf{x}_i$ in der Basis der Eigenvektoren des Tensors $\mathbf{T}$ darstellen und hat so die (unbekannten) Koeffizienten β_i. Nach vielen Matrixmultiplikationen wird $\mathbf{y}_k$ gegen den Eigenvektor $\mathbf{y}_D$ des größten Eigenwerts λ_D konvergieren, und das Verhältnis $|\mathbf{y}_k|/|\mathbf{y}_{k-1}|$ wird sich λ_D nähern. Mit dem MAPLE Arbeitsblatt:

```
restart: with(linalg):
T:=linalg[matrix]( 3,3,[2,0,1,0,1,0,1,0,2]);
y:=linalg[matrix]( 3,1,[1,2,3]);
```

```
yk:=y;
for i from 1 to 20 do
yk:=multiply( T, y ): y:=yk:
od:
print(yk);
eigenvals(T); eigenvects(T);
```

multipliziert man den Tensor

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \tag{11.7}$$

20 mal an den zufällig gewählten Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

und erhält so den Vektor

$$\mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} 6973568801 \\ 2 \\ 6973568801 \end{pmatrix} , \tag{11.9}$$

der durch Anschauen als der Basisvektor

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11.10}$$

identifiziert werden kann.

Die Konvergenz kann allerdings sehr langsam sein, wenn das Verhältnis der beiden größten Eigenwerte nahe bei Eins liegt. Hat man den größten Eigenwert gefunden, so entfernt man die entsprechende Komponente im Anfangsvektor $\mathbf{y}$, indem man seine Projektion auf $\mathbf{x}_3$ von $\mathbf{y}$ abzieht. Damit hat man die in Richtung von $\mathbf{x}_3$ zeigenden Komponenten von $\mathbf{y}$ entfernt und wird beim nächsten Durchlauf nur den nächstkleineren Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor finden.

11.2 Beispiele

In der klassischen Mechanik, der Kontinuumsmechanik, der Elektrodynamik und auch in der Quantenphysik tauchen sog. Tensoren auf, deren Eigenschaften es genauer zu verstehen gilt.

11.2.1 Der Trägheitstensor

Ein Beispiel für einen Tensor ist der Trägheitstensor eines starren Körpers im Raum:

$$\mathbf{T} = \sum_\alpha m_\alpha [(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha)\mathbf{I} - \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha] \;, \tag{11.11}$$

hier alternativ in Indexschreibweise angegeben

$$t_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha [r_k^2 \delta_{ij} - r_i r_j] \;, \tag{11.12}$$

wobei die Summe über alle Punktmassen mit Masse m_α geht und bei gleichen Indizes eine Summation über alle Dimensionen des Raums impliziert wird. Man findet für die Ansammlung von Punktmassen $\mathbf{r}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/2, -1/2)$ und $\mathbf{r}_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/2, 1/2)$ mit Massen $m_1 = m_2 = 1$ z.B. folgenden Trägheitstensor

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2^{3/2} & 1/2^{3/2} \\ -1/2^{3/2} & 3/4 & 1/4 \\ 1/2^{3/2} & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \;. \tag{11.13}$$

Betrachtet man sich $\mathbf{T}$ in Glg. 11.13 genauer so stellt man verschiedene (unangenehme) Eigenschaften fest. Der Tensor hat einen Eigenwert Null und zwei (entartete) Eigenwerte Eins. Damit weiß man bereits, daß das zugehörige Objekt ein länglicher (eindimensionaler) Körper sein muß – ein Stab oder die Anordnung von Punktmassen auf einer Linie. Der Eigenwert Null entspricht einer Drehung um die Längsachse, die beiden gleichen Eigenwerte entsprechen Drehungen um die beiden Achsen senkrecht dazu.

Durch Berechnung des zu Null gehörenden Eigenvektors erhält man die Orientierung der beiden Massen im Raum, also deren Ortsvektoren. In unserem Beispiel wurde der Tensor $\mathbf{T}$ in Glg. 11.13 durch zweimalige Drehung des Koordinatensystems mittels der beiden Drehmatritzen

$$\mathbf{R}_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;. \tag{11.14}$$

aus dem Trägheitstensor der Punktmassen an den Orten $\mathbf{r}_1 = (0, 1, 0)$ und $\mathbf{r}_2 = (0, -1, 0)$ gewonnen. Die kombinierte Drehmatrix erhält man durch Matrixmultiplikation der beiden einfachen Drehungen um die x-Achse und um die z-Achse: $\mathbf{R}(\psi, \phi) = \mathbf{R}_x(\psi)\mathbf{R}_z(\phi)$. Angewendet auf einen Vektor entspricht die Operation der Drehung um ϕ um z und um ψ um x, womit z.B.

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\pi/4, \pi/4) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;. \tag{11.15}$$

Aus dem Tensor $\mathbf{T}$ ergibt sich also der Tensor im Eigenraum durch geeignete Drehnung des Koordinatensystems $\mathbf{T}_E = \mathbf{R}^T(\pi/4, \pi/4)\mathbf{T}\mathbf{R}(\pi/4, \pi/4)$, wobei der Superskript T das Transponieren, d.h. den Vorzeichentausch aller Nicht-Diagonalelemente, anzeigt.

Die MAPLE Befehle

```
restart: with(linalg):
matrixRz:=linalg[matrix](3,3,[cos(phi),sin(phi),0,-sin(phi),cos(phi),0,0,0,1]);
matrixRx:=linalg[matrix](3,3,[1,0,0,0,cos(psi),sin(psi),0,-sin(psi),cos(psi)]);
matrixR2:=multiply( matrixRx, matrixRz );

matrixM := linalg[matrix] ( 3, 1, [ 0, 1, 0 ] );
matrixM1 := multiply( matrixR2, matrixM );
evalf( subs( phi=Pi/4, psi=Pi/4, multiply( matrixR2, matrixM ) ) );

T := linalg[matrix] ( 3, 3, [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ] );
TT:=subs( phi=Pi/4, psi=Pi/4, multiply(matrixR2, T, transpose(matrixR2)));
evalf(");
TTT:=subs( phi=Pi/4, psi=Pi/4, multiply(transpose(matrixR2), TT, matrixR2));
evalf(");
eigenvals( T ); eigenvals( TT ); eigenvals( TTT );
```

erlauben ein einfaches Überprüfen dieser Aussagen und natürlich das Probieren anderer Trägheitstensoren.

11.2.2 Der Spannungstensor

In der Kontinuumsmechanik ist der Spannunstensor von großer Bedeutung. Um ein Gefühl für dieses Objekt zu bekommen betrachten wir der zweidimensionalen Tensor

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} , \tag{11.16}$$

wobei wir auch vom symmetrischen Fall $t_{12} = t_{21}$ ausgehen wollen (statisches Gleichgewicht). Für den zweidimensionalen Fall, der einem dreidimensionalen System mit Rotationssymmetrie in einer beliebigen Richtung entspricht, gibt es die besonders anschauliche grafische Darstellung auf dem Mohr'schen Kreis. Die Richtigkeit läßt sich leicht durch elementare Mathematik überprüfen.

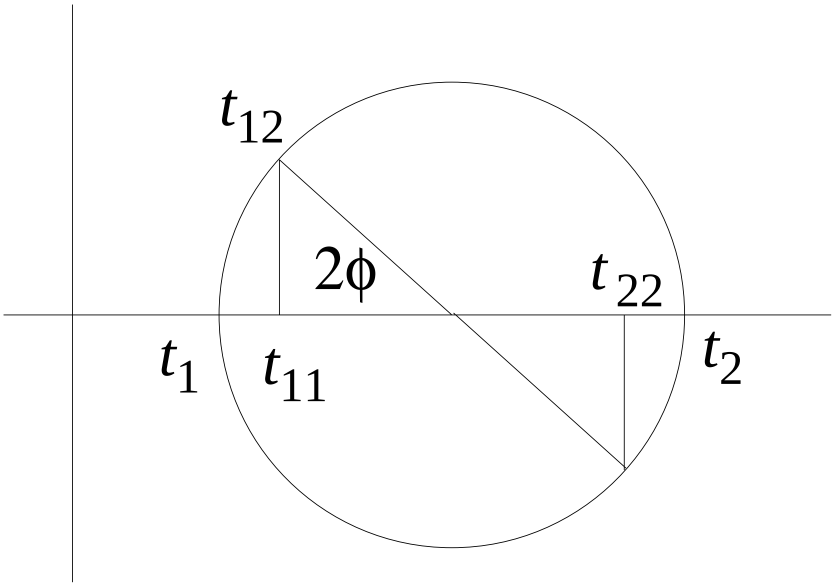

Abbildung 11.1: Mohr'scher Kreis, wobei man nach Antrag der Diagonalelemente t_{11} und t_{22}, sowie des Nicht-Diagonalelements t_{12} des Tensors, direkt vom Kreis die Eigenwerte t_1 und t_2 sowie die Orientierung ϕ ablesen kann.

11.2.3 Die lineare Kette

Eine schöne Aufgabe in der Physik ist die lineare Kette von Massen m, die jeweils mit Federn der Stärke k verbunden sind. Die Bewegungsgleichungen sind

$$m\ddot{u}_1 = -ku_1 + ku_2 \tag{11.17}$$

$$m\ddot{u}_2 = ku_1 - 2\,ku_2 + ku_3 \tag{11.18}$$

$$m\ddot{u}_3 = ku_2 - ku_3 \tag{11.19}$$

oder in Matrixschreibweise

$$m\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad \text{mit } \mathbf{K} = k\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \tag{11.20}$$

Setzt man den Ansatz $\mathbf{u} = \sum_j \alpha_j \mathbf{x}_j \exp(i\omega_j t)$ ein ergibt sich

$$-m\sum_j \alpha_j \mathbf{x}_j \omega_j^2 \exp(i\omega_j t) = \sum_j \alpha_j \mathbf{K}\mathbf{x}_j \exp(i\omega_j t) . \tag{11.21}$$

Jeder Term in der Summe wird (da die $\exp(i\omega_j t)$ linar unabhängig voneinander sind) der Eigenwertgleichung

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_j = -m\omega_j^2 \mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j \tag{11.22}$$

gehorchen, man muß also wieder nur die Eigenwerte der Matrix finden, um die Lösungen zu kennen. Von den zugehörigen Eigenvektoren kann man dann direkt die Eigenschwingungen ablesen. Mit MAPLE

```
T :=  linalg[matrix]( 3, 3, [ 1, -1, 0,  -1, 2, -1,  0, -1, 1 ] );
det( T );
eigenvects( T );
```

ergeben sich die Eigenwerte λ_3 =3, λ_2 =1 und λ_1 =0 mit den zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{x}_3 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 0, 1)$ und $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)$. Die Lösung $\mathbf{x}_3$ entspricht also der Schwingung der mittleren Masse gegen die äußeren, die sich gleichphasig bewegen, bei Lösung $\mathbf{x}_2$ ist die mittlere Masse in Ruhe und die äußeren schwingen gegenphasig. Der Eigenwert λ_1 =0 entspricht einer Translationsbewegung des ganzen Systems.