

# Untersuchung von Akkretionsscheiben mit Hilfe der Molekulardynamik

Diplomarbeit von Micha-Klaus Müller

Hauptberichter: HD Dr. S. Luding

Mitberichter: Prof. Dr. H. Ruder

Institut für Computeranwendungen I

Universität Stuttgart

Januar 2001



# Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . . .	v
<b>1. Grundlagen der Hydrodynamik</b>	<b>1</b>
1.1. Die materielle und räumliche Betrachtungsweise . . . . .	2
1.2. Die materielle Ableitung und die Beschleunigung eines Volumenelements . . . . .	2
1.3. Die Massenbilanzgleichung . . . . .	4
1.4. Die Impulsbilanzgleichungen . . . . .	5
1.4.1. ... für ideale, reibungsfreie Kontinua . . . . .	5
1.4.2. ... für zähe Kontinua . . . . .	6
1.4.3. Spannungstensor und viskoser Spannungstensor . . . . .	7
1.4.4. Die Form des viskosen Spannungstensors . . . . .	9
<b>2. Die Bewegung der Teilchen und ihre Simulation</b>	<b>11</b>
2.1. Molekulardynamik . . . . .	11
2.2. Bewegung im Zentralpotenzial . . . . .	15
2.3. Physikalische Vereinfachungen . . . . .	20
2.3.1. Das Konzept der Pseudoteilchen . . . . .	20
2.3.2. Die Methode der Linked Cells . . . . .	21
2.3.3. Die äußere Wand . . . . .	22
<b>3. Grundlagen der kinetischen Theorie</b>	<b>25</b>
3.1. Das Weiche-Kugel-Gas . . . . .	25
3.1.1. Elastische und inelastische Stöße . . . . .	27

3.1.2.	Energieverlust bei einem inelastischen Stoß . . . . .	28
3.1.3.	Die Wahl des Zeitschrittes und der Federkonstante . . . . .	28
3.2.	Wichtige kinetische Größen für diskrete $N$ -Teilchen-Systeme . . . . .	30
3.2.1.	Die optische Tiefe . . . . .	30
3.2.2.	Mittlere freie Weglänge und Kollisionsfrequenz . . . . .	31
3.2.3.	Die Scherviskosität . . . . .	35
<b>4.</b>	<b>Die Rolle der Temperatur im System</b>	<b>37</b>
4.1.	Die Energie im System . . . . .	37
4.1.1.	Granulare Temperatur und Geschwindigkeitsdispersion . . . . .	38
4.1.2.	Inelastische Teilchenkollisionen - eine Energiesenke . . . . .	38
4.1.3.	Differenzielle Rotation - eine Energiequelle . . . . .	39
4.1.4.	Energiegleichgewicht . . . . .	40
4.2.	Die Temperaturkomponenten aus der Simulation . . . . .	43
4.3.	Rechnerische Bestimmung der Temperaturkomponenten . . . . .	43
4.4.	Die ortsabhängigen Temperaturkomponenten . . . . .	49
<b>5.</b>	<b>Die Dynamik von Systemen ohne Dissipation</b>	<b>57</b>
5.1.	Die Näherung für eine dünne Scheibe . . . . .	58
5.2.	Die hydrodynamischen 2D-Gleichungen . . . . .	60
5.3.	Der radial viskos zerfließende Ring . . . . .	62
5.4.	Der vertikal viskos zerfließende Ring . . . . .	67
5.4.1.	Bestimmung von $v_{T,z}$ und $n(0)$ . . . . .	69
5.4.2.	Die Entkopplung der NSG-Komponenten . . . . .	71
<b>6.</b>	<b>Die Dynamik von Systemen mit Dissipation</b>	<b>73</b>
6.1.	Der radial viskos zerfließende Ring . . . . .	74
6.2.	Der vertikal viskos zerfließende Ring . . . . .	76
6.2.1.	Bestimmung von $v_{T,z}$ und $n(0)$ . . . . .	78

---

<b>7. Das erweiterte Gravitationspotenzial</b>	<b>83</b>
<b>8. Zusammenfassung</b>	<b>91</b>
8.1. Überblick . . . . .	91
8.2. Ergebnisse . . . . .	92
8.3. Ausblick . . . . .	93
<b>A. Herleitung der hydrodynamischen Gleichungen in Zylinderkoordinaten</b>	<b>95</b>
A.1. Herleitung der NSG in Zylinderkoordinaten . . . . .	95
A.2. Herleitung der Kontinuitätsgleichung in Zylinderkoordinaten . . . . .	99
<b>B. Die Definition der Temperatur</b>	<b>101</b>
<b>C. Verwendete Einheiten</b>	<b>105</b>
<b>D. Teilchengenerierung</b>	<b>107</b>
<b>E. Auswertung der Simulationen</b>	<b>111</b>
<b>Danksagungen</b>	<b>115</b>



## Vorwort

Ein sehr großer Teil der gesamten im Kosmos befindlichen Materie liegt im gasförmigen Zustand vor. Auf Grund auftretender Gravitations- und damit verbundener Zentrifugalkräfte resultieren Gasflüsse, wie sie z.B. in Akkretionsscheiben in Doppelsternsystemen oder in den differenziell rotierenden Schichten aller Sterne vorkommen. Eine solche Gasdynamik ist physikalisch nur mit den Gleichungen der Hydrodynamik zu beschreiben, bei deren Anwendung man versucht ist, das in den Gleichungen auftretende Geschwindigkeitsfeld zu lösen. Dazu wurden viele numerische Methoden entwickelt, u.a. sei hier die Methode der *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)* erwähnt, welche natürlich imstande ist, hydrodynamische (makroskopische) Parameter einzubinden und damit makroskopische Effekte zu berücksichtigen. Demgegenüber steht die in dieser Arbeit verwendete Methode der *Molekulardynamik*, welche explizit die Trajektorien der in den Simulationen das Gas oder das granulare Material aufbauenden Teilchen numerisch berechnet. Die MD-Methoden stellen insofern zur SPH keine Konkurrenz dar, als sie nur die Bewegung diskreter Teilchen betrachtet. Großer Vorteil gegenüber der SPH ist zweifellos die Möglichkeit der Berücksichtigung dissipativer Stoßvorgänge.

Im Allgemeinen stellt diese Arbeit mehr eine generelle Untersuchung von scheiben- und ringförmigen Aggregaten von diskreten Teilchen dar als eine explizite Analyse von Akkretions- oder Staubscheiben. Mit Hilfe molekulardynamischer Methoden werden einerseits die gefundenen Eigenschaften von solchen ringförmigen Teilchensystemen diskutiert und analysiert, andererseits ein Übergang vom diskreten  $N$ -Teilchen-System (MD-Simulation) zum kontinuierlichen Medium (Hydrodynamik) versucht, indem die Simulationsergebnisse mit speziellen Lösungen der hydrodynamischen Grundgleichungen verglichen werden, wobei im Rahmen der Auswertungen wichtige Teilchengrößen über viele Teilchen in hinreichend kleinen Volumenelementen gemittelt werden. Deshalb wird in einem ersten Kapitel eine Einführung in die Theorie der Hydrodynamik und ihrer grundlegenden Gleichungen gegeben, welche in späteren Kapiteln im Speziellen untersucht und überprüft werden. Das zweite Kapitel handelt von der in dieser Arbeit verwendeten Simulationsmethode und die damit verbundenen physikalischen Approximationen, ferner werden erste Ergebnisse präsentiert. Das dritte Kapitel zeigt dann die zu Grunde gelegten Annahmen der kinetischen Theorie und es werden die für die Simulationen relevanten Parameter wie Zeitschritt und Dissipation diskutiert und ihre Werte hinsichtlich der Optimierung des Programmlaufes und der physikalischen Erfordernisse geeignet gewählt. Im Rahmen allgemeiner Untersuchungen ringförmiger Systeme des vierten Kapitels wurde mehr die Nähe zu planetarischen Ringen gesucht, um bessere Vergleichsmöglichkeiten mit anderen theoretischen Arbeiten zu haben. Es wird dort vor allem das Hauptaugenmerk auf die Temperaturverteilung in den Systemen gelegt. Kapitel fünf und sechs widmen

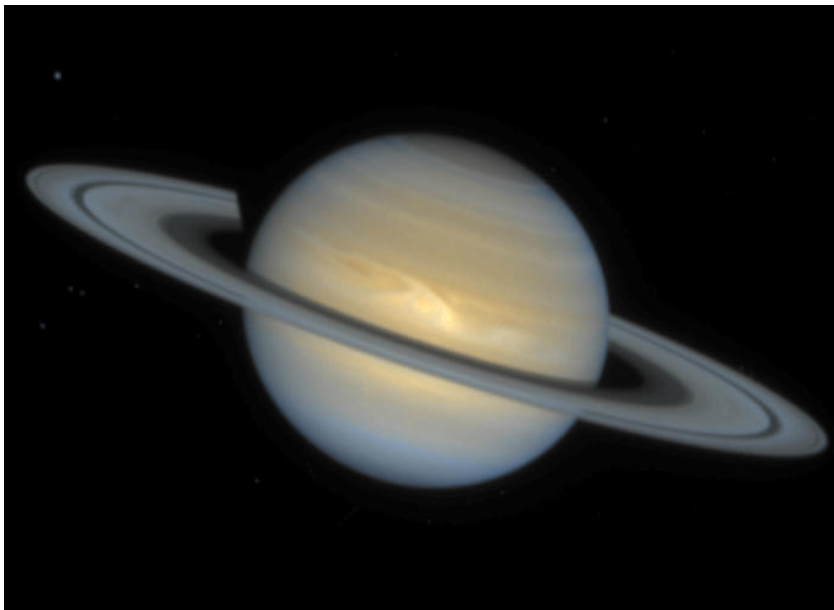
sich ausschließlich der Überprüfung der Navier-Stokes-Gleichung, welche in geeigneter Form die radiale wie auch die vertikale Dynamik der Ringe und Scheiben beschreibt. Letztendlich wird noch kurz der Einfluss eines weiteren Gravitationspotenzials in Form eines umlaufenden Mondes auf den Ring untersucht.

Im Großen und Ganzen soll diese Arbeit verdeutlichen, dass nicht nur granulare Medien, aus denen planetarische Ringe bestehen, sondern auch gasförmige Materieansammlungen durch die mikroskopische Natur der Molekulardynamik beschrieben werden können.





*Eine supermassive Staubscheibe im Zentrum der Galaxie NGC 4261, aufgenommen am 4. Dezember 1995 mit der WFPC2 des Hubble Space Telescope.*



*Saturn, wie er von der WFPC2 am 1. Dezember 1994 vom Hubble Space Telescope aufgenommen wurde. Sein Ringsystem zeigt deutlich die dunkle Cassini-Spalte.*



# 1. Grundlagen der Hydrodynamik

Für die Beschreibung der Bewegung eines Kontinuums denkt man es sich in infinitesimale Volumina zerlegt, welche aus dem Stoff bestehen, der das ganze Kontinuum aufbaut. Die Bewegung der Volumenelemente und ihre Wechselwirkung untereinander ist im Folgenden von Interesse. Hinreichend viele Atome oder Moleküle im Falle von Gasen, Flüssigkeiten oder gar Plasmen wie z.B. ionisierte Sternmaterie in Akkretionsscheiben sollen ein solches Volumenelement aufbauen, ihre Existenz aber in der Hydrodynamik, die ja eine makroskopische Theorie ist, nicht weiter beachtet werden. Die in Abschnitt 2.3 eingeführten Pseudoteilchen sind nicht mit diesen Volumenelementen zu verwechseln, sondern gleichzustellen mit den erwähnten atomaren Teilchen.

Solche makroskopischen Volumenelemente  $i$  seien nun zu einer Referenzzeit  $t = t_0$  an den Orten  $\boldsymbol{\xi}^i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i)^T$  (das sind die sog. *materiellen Koordinaten*, da sie den Ort eines Volumenelementes markieren) bezüglich eines festen Koordinatensystems. Jedes Volumenelement nimmt zur Referenzzeit einen anderen Ort ein und wird daher durch seine materiellen Koordinaten eindeutig identifiziert. Für Zeiten  $t > t_0$  bewegen sie sich von ihren ursprünglichen Orten weg und finden sich für irgendein  $t$  an den aktuellen Orten

$$\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{x}^i(\boldsymbol{\xi}^i, t) \quad (1.1)$$

wieder (das sind die sog. *räumlichen Koordinaten*, da sie kein Volumenelement, sondern einen festen Punkt im Raum, der von den Volumenelementen passiert werden kann, kennzeichnen), natürlich vereinbarungsgemäß mit  $\boldsymbol{x}^i(\boldsymbol{\xi}^i, t_0) = \boldsymbol{\xi}^i$  als Anfangsbedingung. Die Abhängigkeit des aktuellen Ortes  $\boldsymbol{x}^i$  des Volumenelements vom Ausgangsort  $\boldsymbol{\xi}^i$  stellt nämlich ein Anfangswertproblem dar: ist neben dem Ausgangsort noch die Beziehung (1.1) bekannt, so kann man für jeden Zeitpunkt  $t$  den aktuellen Ort bestimmen. Gl. (1.1) stellt also die Bahnen der Volumenelemente im Raum dar, deren Bestimmung z.B. eines der obersten Ziele der klassischen Mechanik ist.

## 1.1. Die materielle und räumliche Betrachtungsweise

Wenn sich nun ein Kontinuum durch den Raum bewegt, so werden sich i.A. wichtige Größen mit der Zeit ändern. Um die zeitliche Änderung einer Größe  $A$  näher zu untersuchen, hat man zwei Möglichkeiten:

- entweder man setzt das Koordinatensystem des Beobachters in das Volumenelement  $i$  und beobachtet die zeitliche Änderung der an das Volumenelement gehefteten, zu untersuchenden Größe  $A$  (dann ist  $A = A(\boldsymbol{\xi}^i, t)$ , worin die materiellen Koordinaten konstant sind und  $t$  die Variable ist  $\rightarrow$  *Lagrange'sches Bild*),
- oder man betrachtet einen festen Punkt  $\boldsymbol{x}^i$  des Raumes und beobachtet die sich an diesem Ort auf Grund der passierenden Volumenelemente ändernde, zu untersuchende Größe (dann ist  $A = A(\boldsymbol{x}^i, t)$ , worin die räumlichen Koordinaten ein konstanter Parameter und  $t$  die Variable sind  $\rightarrow$  *Euler'sches Bild*).

Die Größe  $A$  kann z.B. ein skalares Dichte- oder Temperaturfeld, ein vektorielles Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsfeld  $\boldsymbol{v}$  bzw.  $\boldsymbol{a}$  oder auch ein tensorielles Spannungsfeld  $\underline{T}$  sein.

Das *Euler'sche* Bild impliziert, dass verschiedene Volumenelemente jeweils zu unterschiedlichen Zeitpunkten einen festen räumlichen Ort passieren, da ein konstantes räumliches Koordinatentripel und eine variable Zeit gemäß Gl. (1.1) auch einen variablen Satz materieller Koordinaten (d.h. verschiedene Volumenelemente) zur Folge hat.

## 1.2. Die materielle Ableitung und die Beschleunigung eines Volumenelements

Die totale Zeitableitung einer Größe  $A(\boldsymbol{\xi}^i, t)$  im Lagrange'schen Bild ist

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\boldsymbol{\xi}^i = \boldsymbol{\xi}_0^i} + \frac{\partial A}{\partial \xi_1^i} \Big|_{t=t_0} \frac{\partial \xi_1^i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2^i} \Big|_{t=t_0} \frac{\partial \xi_2^i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \xi_3^i} \Big|_{t=t_0} \frac{\partial \xi_3^i}{\partial t} \\ &= \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\boldsymbol{\xi}^i = \boldsymbol{\xi}_0^i} . \end{aligned} \quad (1.2)$$

Hierin verschwinden die  $\frac{\partial \xi_\alpha^i}{\partial t}$  (mit  $\alpha = 1, 2, 3$  für die drei Raumdimensionen  $x, y, z$ ), da ja ein bestimmtes Volumenelement  $i$  betrachtet wird und deshalb seine materiellen Koordinaten zeitlich konstant bleiben. Die totale Zeitableitung derselben

Größe im Euler'schen Bild, also  $A = A(\mathbf{x}^i(\boldsymbol{\xi}^i, t), t)$ , ist

$$\frac{DA}{Dt} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}^i = \mathbf{x}_0^i} + \frac{\partial A}{\partial x_1^i} \Big|_{t=t_0} \frac{\partial x_1^i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_2^i} \Big|_{t=t_0} \frac{\partial x_2^i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_3^i} \Big|_{t=t_0} \frac{\partial x_3^i}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Da diese totalen Zeitableitungen hinsichtlich eines durch seine materiellen Koordinaten eindeutig identifizierten Volumenelements zu bilden sind, nennt man sie auch die *materiellen* oder *substanziellen* Zeitableitungen  $D/Dt$ , wie sie z.B. auch in der Navier-Stokes-Gleichung (im Folgenden abgekürzt als NSG geschrieben) vorkommen.

Da in Gl. (1.3) die zeitabhängigen räumlichen Koordinaten  $\mathbf{x}^i$  die Trajektorie eines Volumenelements  $\boldsymbol{\xi}^i$  repräsentieren, sind die

$$v_\alpha^i = \frac{dx_\alpha^i}{dt} \quad (1.4)$$

die Geschwindigkeitskomponenten des Volumenelements am Ort  $\mathbf{x}^i(t)$ . Damit kann Gl. (1.3) vektoriell auch als

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla A) = \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A \quad (1.5)$$

geschrieben werden, wobei der Punkt das Skalarprodukt zwischen Tensoren beliebiger Stufe kennzeichnet. Für vektorielle Größen, wie z.B. das in der NSG vorkommende Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$ , gilt ähnlich

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (1.6)$$

wobei für den in der Geschwindigkeit nicht-linearen Term zusätzlich

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = (\nabla_d \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{v} \quad (1.7)$$

gilt. Während  $\nabla \mathbf{v}$  einen Vektorgradienten darstellt (welcher für die Scherviskosität in Kapitel 3.2.3 wichtig wird), bezeichnet der Index „d“ ein dyadisches Produkt.

Gl. (1.6) ist bereits die Beschleunigung eines materiellen Volumenelements im Euler'schen Bild, d.h. es ist in Gl. (1.3) die allgemeine Größe  $A$  durch die Vektorkomponenten  $v_\alpha$  ersetzt worden. Zur Beschleunigung im Lagrange'schen Bild kommt man, wenn man Gl. (1.2) zu Grunde legt.

Zusammenfassend sei nochmals erwähnt, dass man in der Lagrange'schen Darstellungsweise einem Volumenelement  $\boldsymbol{\xi}^i$  auf seiner Bahn folgt und sich damit speziell sein Ortsvektor  $\mathbf{x}^i(\boldsymbol{\xi}^i, t)$  wie auch die zu beobachtende Größe  $A(\boldsymbol{\xi}^i, t)$  zeitlich ändern. Demgegenüber sucht man sich in der Euler'schen Darstellung einen festen Raumpunkt  $\mathbf{x}^i$  aus, wobei dieser durch verschiedene Volumenelemente zu verschiedenen Zeitpunkten besetzt wird und man der zu beobachtenden Größe eine zeitliche Änderung unterstellen kann.

### 1.3. Die Massenbilanzgleichung

Für das Folgende sei nochmals erwähnt, dass der bisher eingeführte Begriff eines Volumenelements im hydrodynamischen Sinn einen Bereich im Kontinuum repräsentiert, der ein endlich großes Volumen einnimmt, welches viele Partikel (Atome, Moleküle, Pseudoteilchen) beinhaltet.

Die Masse eines Volumenelements mit Volumen  $\Delta V$  (und Oberfläche  $\Delta F$ ) ist

$$M = \int_{\Delta V} \rho \, dV . \quad (1.8)$$

Hier ist  $\rho$  die Massendichte des Volumenelements. Tritt mit der Zeit Materie aus der Oberfläche aus, so kann man eine Massenstromdichte (oder Impulsstromdichte)  $\rho \mathbf{v} = n m \mathbf{v} = \mathbf{j}$  mit  $\mathbf{v}$  als Geschwindigkeit,  $n$  als Anzahldichte und  $m$  als die Masse der strömenden Partikel (analog zur elektrischen Stromdichte  $ne\mathbf{v}$  in der Elektrodynamik) definieren, welche positiv ist, wenn Masse aus dem Volumenelement austritt und negativ, wenn Masse in das Volumenelement hineinfließt. Für die zeitliche Massenänderung gilt dann

$$\frac{dM_1}{dt} = \int_{\Delta F} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} . \quad (1.9)$$

Andererseits wird auch eine zeitliche Massenänderung des Volumenelements eintreten, wenn sich dessen Dichte innerhalb  $\Delta V$  zeitlich ändert:

$$\frac{dM_2}{dt} = - \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV , \quad (1.10)$$

worin das negative Vorzeichen den Umstand ausdrückt, dass ein Einströmen von Masse eine Dichtezunahme innerhalb  $\Delta V$  verursacht. Die Bilanzierung der Gln. (1.9) und (1.10) und danach die Anwendung des *Gauss'schen* Integralsatzes auf das Oberflächenintegral trägt dem Umstand Rechnung, dass im Inneren eines Volumenelementes die Dichte zeitlich zu- bzw. abnimmt, wenn Masse in das Volumen ein- bzw. herausströmt:

$$dM_1 = \int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV = - \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = dM_2 \quad (1.11)$$

bzw.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (1.12)$$

Gl. (1.12) ist die sogenannte Kontinuitätsgleichung, welche die Massenbilanz innerhalb eines Volumenelements zum Ausdruck bringt.

## 1.4. Die Impulsbilanzgleichungen

### 1.4.1. ... für ideale, reibungsfreie Kontinua

Die Bewegungsgleichung für Volumenelemente in obigem Sinne entspricht dem zweiten *Newton'schen* Axiom der Klassischen Mechanik und wurde für die Hydrodynamik von L. Euler aufgestellt. Zu dieser *Euler'schen* Gleichung gelangt man, wenn man ein Volumenelement im Kontinuum genauer betrachtet. Auf das betrachtete Volumenelement wirken im idealen Kontinuum zwei Kräfte, einerseits eine externe Kraft (ein Beispiel hierfür ist das auf den Saturn-Ring wirkende Zentralpotenzial des Planeten), ausgedrückt durch

$$\mathbf{F}_V = \int_{\Delta V} \rho \mathbf{f} dV, \quad (1.13)$$

wobei hier das Produkt  $\rho \mathbf{f}$  die sogenannte *Volumenkraftdichte* ist. Andererseits üben die umgebenden Volumenelemente durch ihre Bewegung auf das betrachtete Volumenelement Kräfte aus, die allgemein durch

$$\mathbf{F}_p = \oint_{\Delta F} \underline{\mathbf{T}}' \cdot d\mathbf{F} \quad (1.14)$$

beschrieben werden können, worin  $\underline{\mathbf{T}}'$  den allgemeinen Spannungstensor, wie er im nächsten Kapitel eingeführt wird, darstellt. Für reibungsfreie Medien ist  $\underline{\mathbf{T}}'$  isotrop, weshalb  $\underline{\mathbf{T}}' = -p\underline{\mathbf{1}}$  gilt. Damit ist dann

$$\mathbf{F}_p = - \oint_{\Delta F} p d\mathbf{F} = - \oint_{\Delta F} p \mathbf{n} dF, \quad (1.15)$$

wenn  $p$  den Druck bezeichnet. Das negative Vorzeichen impliziert eine Kompression des Volumenelementes, wobei die Kraft durch den Druck parallel zu der Normalen  $\mathbf{n}$  eines Flächenelementes  $dF$  in Richtung Volumeninneres weist. Die infinitesimale Masse des Volumenelementes ist  $dm = \rho dV$  und in Anlehnung an das zweite *Newton'sche* Gesetz folgt mit der durch diese Kräfte verursachten Beschleunigung  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  des Volumenelements

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \rho \mathbf{f} dV - p \mathbf{n} dF, \quad (1.16)$$

oder in integraler Form, wenn das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umgewandelt und das Teilchenvolumen  $\Delta V$  hinreichend klein gewählt wird, damit die Beschleunigung im gesamten Teilchenvolumen als konstant angenommen

werden kann,

$$\int_{\Delta V} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{\Delta V} \rho \mathbf{f} dV - \underbrace{\int_{\Delta F} p \mathbf{n} dF}_{-\int_{\Delta V} \nabla p dV} . \quad (1.17)$$

Die Beschleunigung entspricht der totalen Zeitableitung des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  und ist die *materielle Zeitableitung im Euler'schen Bild*. Gl. (1.17) geht damit über in die gesuchte *Euler-Gleichung* für ideale, reibungsfreie Medien:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla p . \quad (1.18)$$

### 1.4.2. ... für zähe Kontinua

Während die *Euler'sche* Gleichung reibungsfreie Kontinua beschreibt und reversible Impulsübertragungen berücksichtigt, die nur mit der mechanischen Bewegung der Volumenelemente und den von der Umgebung auf das betrachtete Element ausgeübten Druckkräften zusammenhängen, kommen bei realen Kontinua noch irreversible Impulsänderungen auf Grund (energie dissipierender) innerer Reibungskräfte hinzu, was in der NSG in Form eines tensoriellen Spannungsfeldes als Zusatzglied zum Ausdruck kommt und diese damit zur Beschreibung *zäher Medien* befähigt.

Welcher Art das Zusatzglied ist, mit dem die Euler-Gleichung in die NS-Gleichung übergeht, wird nun mittels der zeitlichen Änderung der auf ein Teilchen übertragenen reversiblen *Impulsdichte* gezeigt. Diese lautet in Indexschreibweise <sup>1</sup>

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} . \quad (1.19)$$

Setzt man hierin für die partiellen Ableitungen die Euler- (Gl. (1.18)) bzw. die Kontinuitätsgleichung (Gl. (1.12)) in Indexschreibweise ein, so folgt mit der Beziehung  $-\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$  der Zusammenhang zwischen reversibler Impulsdichteänderung und Änderung der reversiblen *Impulsstromdichte*

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{ik} p + \rho v_k v_i) + \rho f_i = -\frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} + \rho f_i , \quad (1.20)$$

wobei hier  $\Pi_{ik}$  der Tensor der Impulsstromdichte ist, der offensichtlich symmetrisch ist (ein Vertauschen der Indizes ändert die Gestalt nicht, d.h. es ist

<sup>1</sup>In der sog. Indexschreibweise wird die vektorielle vermieden; die Indizes repräsentieren Vektorkomponenten und unterliegen der *Einstein'schen* Summenkonvention, nach der in einem Term wiederholt auftretende Indizes hochsummiert und als *stumme* Indizes bezeichnet werden.



$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi}^T \longrightarrow \Pi_{ik} = \Pi_{ki}.$$

Die Berücksichtigung zäher Medien gelingt durch Hinzufügen des negativen viskosen (zähen) Spannungstensors und es folgt dann der Tensor der gesamten (reversiblen und irreversiblen) Impulsstromdichte

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_k v_i - T_{ik} = -T'_{ik} + \rho v_k v_i. \quad (1.21)$$

$T'_{ik}$  ist hier der Spannungstensor. Damit folgt dann aus Gl. (1.20)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\delta_{ik} p + \rho v_k v_i - T_{ik}) + \rho f_i, \quad (1.22)$$

und damit nach Umformung und unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung die Navier-Stokes-Gleichung in Komponentenschreibweise

$$\rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left( v_k \frac{\partial}{\partial v_k} \right) v_i \right] = -\frac{\partial}{\partial x_k} (p\delta_{ik} - T_{ik}) + \rho f_i \quad (1.23)$$

bzw. in vektorieller Schreibweise

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{T} + \rho \mathbf{f} = \nabla \cdot \underline{T}' + \rho \mathbf{f}, \quad (1.24)$$

wobei  $\nabla \cdot \underline{T}$  die Divergenz des viskosen Spannungstensors darstellt.

### 1.4.3. Spannungstensor und viskoser Spannungstensor

Betrachtet wird nun die auf das Teilchen von seiner Umgebung übertragene Impulsstromdichte auf Grund von Druck- und Reibungseffekten, d.h. der Spannungstensor

$$\underline{T}' = -p\underline{1} + \underline{T}. \quad (1.25)$$

Bezüglich der Tangentialfläche mit Normalenvektor  $\mathbf{n}$  an einem bestimmten Punkt  $\mathbf{x}$  an der Volumenelementoberfläche wirken nun Spannungen von Betrag und Richtung, die durch den Spannungstensor in Gl. (1.25) bestimmt werden. Die Spannungskomponenten lassen sich durch

$$t_i(x_i, t, n_i) = T_{ij}(x_i, t) n_j \quad (1.26)$$

berechnen.

Wählt man den Punkt so, dass die anliegende Tangentialfläche parallel zu einer Koordinatenfläche eines orthogonalen Koordinatensystems ist, so ist der Normalenvektor ein Basiseinheitsvektor des Koordinatensystems, was speziell zu

$$t_i(\mathbf{e}_j) = T_{ij} \quad (1.27)$$

als Komponenten des Spannungstensors führt, der damit gleich der  $i$ -ten Spalte des Spannungstensors ist. Dann gilt die in Abb. 1.1 gezeigte Nomenklatur der Indizierung.

Komponenten mit  $i = k$  nennt man Normalspannungen, solche mit  $i \neq k$  Tangential- oder Scherspannungen. Negative Normalspannungen heißen Kompressionspannungen, positive Normalspannungen bezeichnet man als Dehnungsspannungen.

Da der Spannungstensor  $\underline{T}$  symmetrisch ist, lässt sich für ihn stets ein Koordinatensystem finden, dessen Achsen parallel zu den zueinander orthogonalen Tensoreigenvektoren sind. In diesem orthogonalen Koordinatensystem hat der Tensor Diagonalform, d.h. die Scherspannungen sind Null und Normalspannungen sind seine Eigenwerte. Ein solcher Tensor würde an Ebenen, die parallel zu den drei Koordinatenflächen sind, zu Spannungsvektoren führen, die parallel zu den entsprechenden Basisvektoren orientiert sind. Das bedeutet, dass der Tensor an Ebenen, deren Normalen die Tensoreigenvektoren darstellen, die Eigenwertgleichung  $\underline{T} \cdot \underline{n} = \lambda \underline{n} = \underline{T} \cdot \underline{n} - \underline{t} \cdot \underline{n} = \mathbf{0}$  erfüllt. Demgegenüber erzeugt in diesem Koordinatensystem der Tensor an allen anderen Ebenen geneigte Spannungsvektoren.

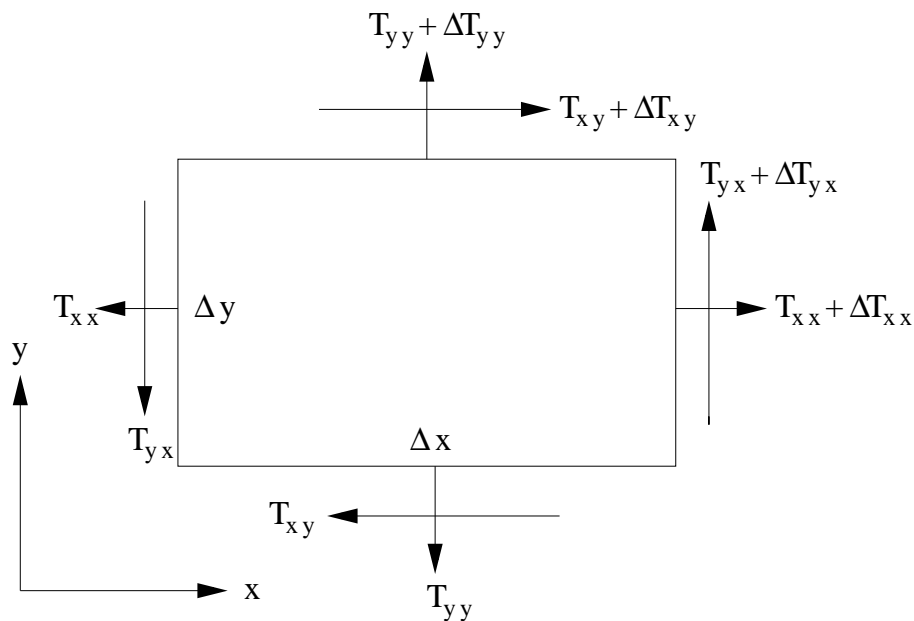


Abbildung 1.1.: Zur Indizierung der Tensorkomponenten: der erste Index gibt die Richtung an, in der die Spannungskomponente wirkt, der zweite den Normalenvektor der Ebene, an der sie wirkt.

#### 1.4.4. Die Form des viskosen Spannungstensors

Die genaue Form des viskosen Spannungstensors aus Gl. (1.25) lässt sich aus Symmetrieüberlegungen ableiten [8], worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. Sie lautet in Komponentenschreibweise

$$T_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad (1.28)$$

womit die NSG übergeht in

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right] + \rho f_i. \quad (1.29)$$

$\eta, \zeta$  heißen Zähigkeitskoeffizienten, ersteren nennt man speziell die *dynamische* Viskosität (nicht zu verwechseln mit der Stoßviskosität aus Kapitel 3.1), letzteren die *Volumenviskosität*, welche durch Volumenänderung zustande kommt. Um den Spannungstensor zu erhalten, addiert man an Gl. (1.28) einfach den Term  $-p\delta_{ik}$ . Er enthält also in seinen Diagonalelementen  $i = k$  zu den viskosen Tensorkomponenten noch den Kompressionsdruck  $-p$ .

Zur Vereinfachung der NSG kann man die räumliche Änderung der Zähigkeitskoeffizienten als klein ansehen, sie also vor die Differenziationssymbole ziehen. Wieder mit Berücksichtigung der Beziehung  $-\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$  folgt dann

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_i \partial x_l}. \quad (1.30)$$

Betrachtet man inkompressible Medien (darunter fallen viele Flüssigkeiten), dann ist  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  und es verschwindet der letzte Term und der dritte Term in der Klammer der rechten Seite von Gl. (1.28). Damit vereinfacht sich der Spannungstensor in Komponentenschreibweise zu

$$T'_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = -p\delta_{ik} + 2\eta D_{ik}, \quad (1.31)$$

wobei  $D_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$  den sogenannten *Deformationstensor* bezeichnet.

Diese Vereinfachung für inkompressible Medien ist für astrophysikalische Beispiele i.A. nicht zu machen, da es sich im Falle von Akkretionsscheiben um kompressible Gase, im Falle von Planetenringen um ein kompressibles, granulares Material handelt. Es können daher im Laufe der zeitlichen Entwicklung durchaus Verdichtungen auftreten ( $\rightarrow$  Kapitel 7), welche  $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$  erzwingen.



## 2. Die Bewegung der Teilchen und ihre Simulation

Im Universum treten vielfach (näherungsweise) kugelsymmetrische Gravitationspotenziale auf, die man auf Grund ihrer Symmetrie *Zentralpotenziale* nennt, und um die sich kleinere Massen in Orbits bewegen. Wichtige Beispiele solcher spezieller Umlaufbahnen sind die Planetenbahnen in unserem Sonnensystem, die Keplerbahnen des Ringmaterials in Planetenringen, die Bewegung der Gasmassen in Akkretionsscheiben oder die differenzielle Rotation der Zentralgebiete rotierender Galaxien. Die auf solchen Bahnen laufenden Körper beschreiben mehr oder weniger ausgeprägte Ellipsenbahnen, auf denen sie sich hauptsächlich mit der noch zu besprechenden Keplergeschwindigkeit bewegen. Näheres zu der Physik dieser Bewegungen findet sich in dem späteren Abschnitt 2.2.

Da die Kraftgesetze, denen die Teilchen unterliegen, bekannt sind und an verschiedenen Zeitpunkten die auf sie wirkenden Kräfte und die daraus resultierenden Orte berechnet werden können, ist eine Simulationsmethode erforderlich, die die *Newton'schen* Bewegungsgleichungen aller Teilchen zu jedem Zeitpunkt aufintegrieren kann. Die in dieser Arbeit verwendete Simulationsmethode ist die *Molekulardynamik*, auf die im folgenden Abschnitt 2.1 näher eingegangen wird. Ferner wird in Abschnitt 2.3 noch auf verwendete notwendige physikalische Approximationen eingegangen, ohne die die numerischen molekulardynamischen Simulationen wesentlich zeitintensiver gewesen wären.

### 2.1. Molekulardynamik

Simulierte Akkretionsscheiben oder planetarische Ringe bestehen aus Pseudoteilchen, die im Falle von Akkretionsscheiben Volumenelementen entsprechen (s. Kapitel 1), die mit Gas und im Falle von Planetenringen mit Festkörpern gefüllt sind. Auf sie wirkt dann die Gravitationskraft des Zentralkörpers. In den Simulationen wird die *Eigengravitation* der Scheibe vernachlässigt, was sicherlich bei Planetenringen und stellaren Akkretionsscheiben gerechtfertigt ist. Dagegen würde die molekulardynamische Simulation von massiven Akkretionsscheiben, wie sie in Zentren vieler Galaxien anzutreffen sind, die Implementierung eines Eigengravitationspotenzials, was auf die Teilchen selbst zurückwirkt, erfordern.

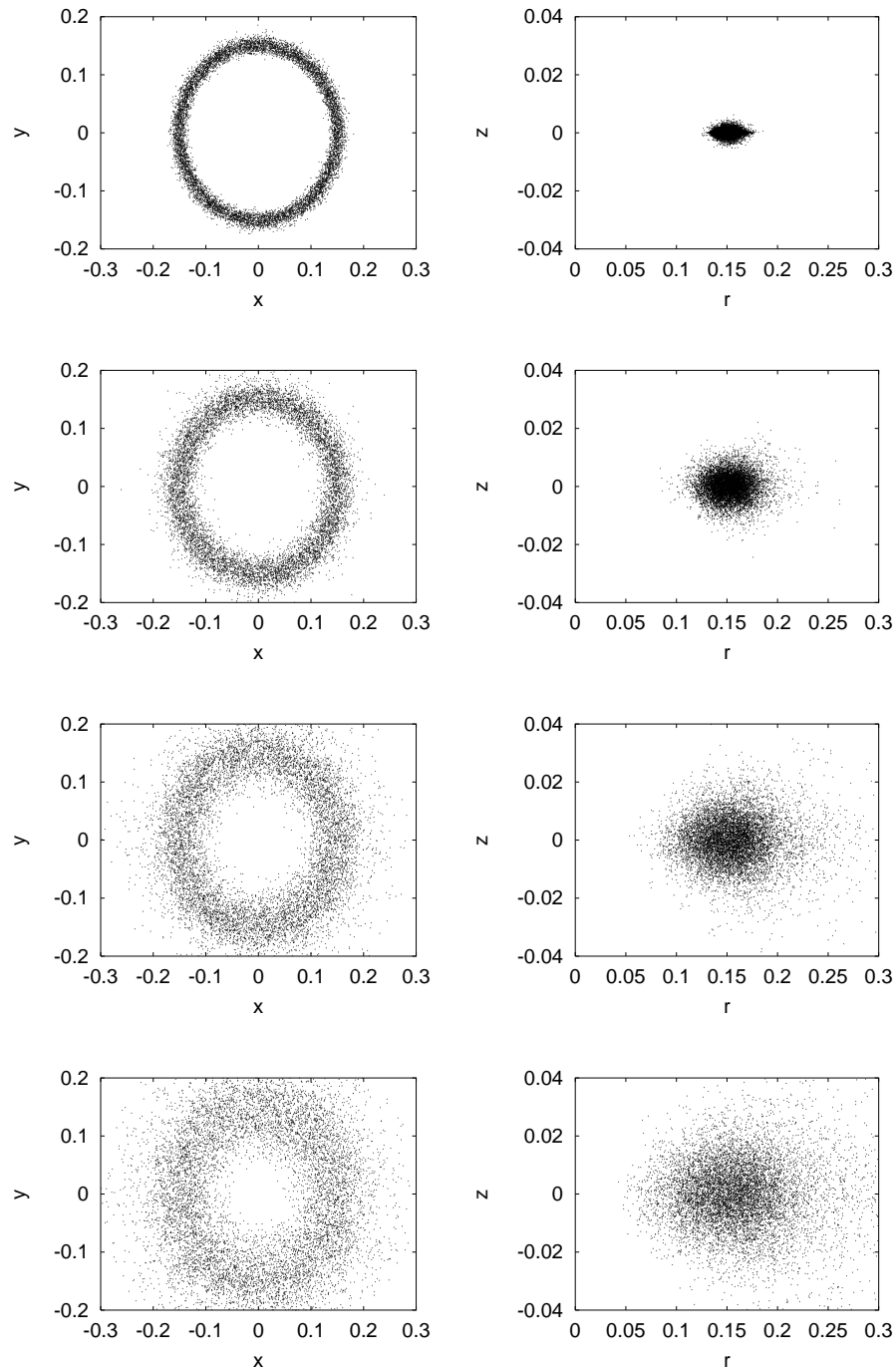


Abbildung 2.1.: Draufsicht (links) und radialer Querschnitt (rechts) eines dissipationsfreien Ringes zu den Zeitpunkten  $t = 0.5, 5.0, 10.0$  und  $14.3 T_{\text{Kep}}$  (von oben nach unten).

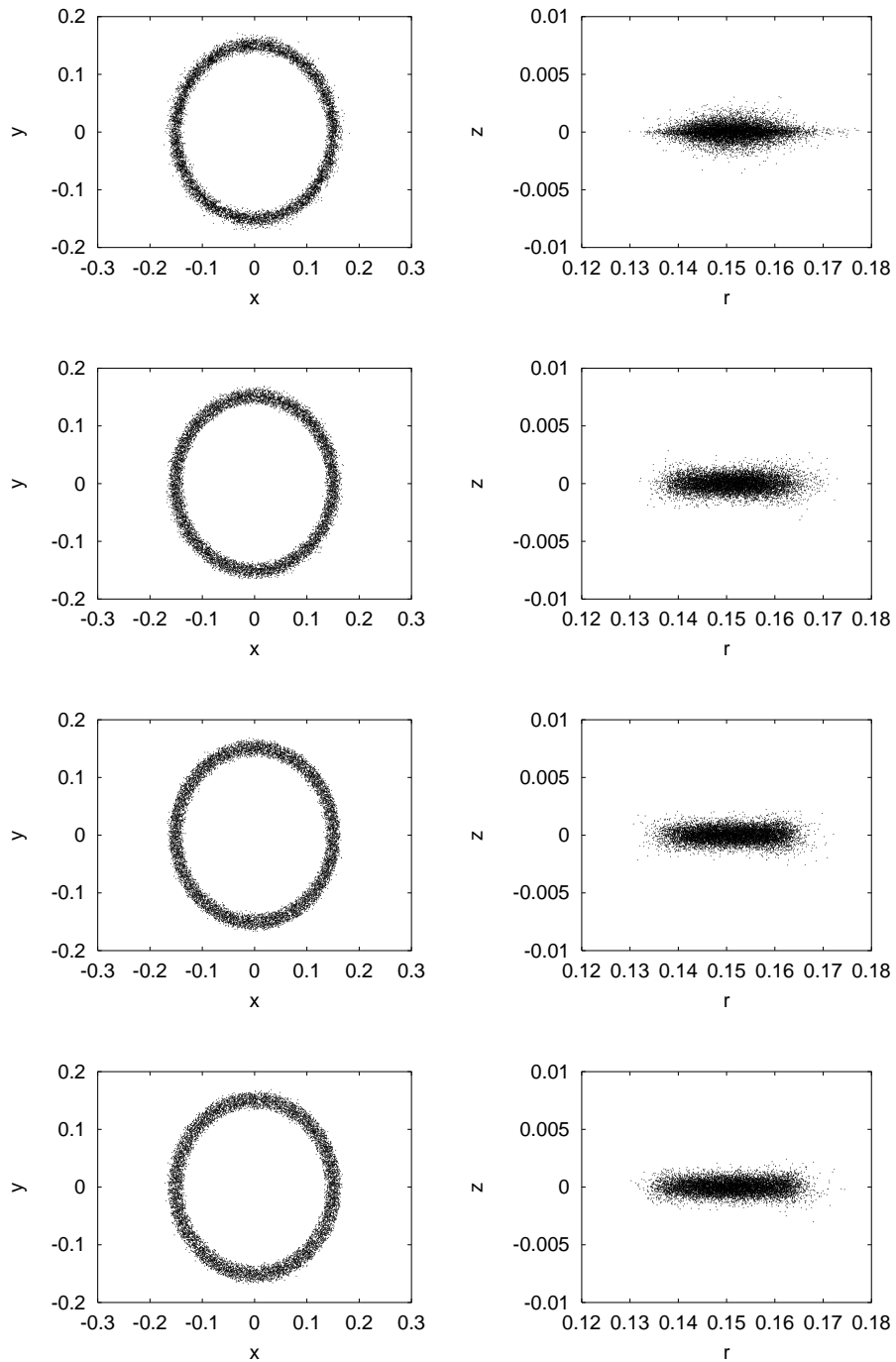


Abbildung 2.2.: Draufsicht (links) und radialer Querschnitt (rechts) eines dissipativen Ringes zu den Zeitpunkten  $t = 0.5, 5.0, 10.0$  und  $14.3 T_{\text{Kep}}$  (von oben nach unten).

Seine Implementierung würde im Rahmen sogenannter *Tree-Codes* geschehen, was allerdings über das Ziel dieser Arbeit hinaus gehen würde. Es werden also im Folgenden ring- bzw. scheibenförmige Teilchenaggregate mit gegenüber der Zentralmasse vernachlässigbarer Masse untersucht. Beispiele für molekulardynamische Simulationen zeigen die Abbn. 2.1 und 2.2, welche einerseits die Verteilung der Pseudoteilchen auf der  $x, y$ -Ebene, andererseits ihre von  $r$  abhängige axiale Verteilung demonstrieren. In diesen Beispielen sieht man die zeitliche Entwicklung eines dissipationfreien wie auch eines stark dissipativen Ringes. Das stabilisierende Verhalten des dissipativen Ringes resultiert aus der sehr dissipativen Natur der Teilchenstöße (s. Abschnitt 3.1.2).

In den molekulardynamischen Simulationen werden die Bewegungsgleichungen der Form

$$\mathbf{F}_i(t) = m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i(t)}{dt^2} = \mathbf{F}_i^{\text{koll}}(t) - \nabla \left( \phi_i^c(t) + \phi_i^m(t) \right) \quad (2.1)$$

numerisch integriert, wobei

$$\mathbf{F}_i^{\text{koll}}(t) = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}(t)$$

die durch den simultanen Stoß von  $N - 1$  Teilchen hervorgerufene Kraft auf das Teilchen  $i$  ist. Bei Eigengravitation müsste man alle  $N - 1$  Teilchen im System berücksichtigen, während bei den in dieser Arbeit verwendeten kurzreichweitigen Wechselwirkungen weicher Teilchen Mehr-Teilchen-Stöße aber eher selten die Regel sind. Während die Kollisionskräfte nur endliche Zeiten wirken, nehmen die Potenziale

$$\phi_i^c(t) = -\frac{Gm_i M_c}{r_{i,c}(t)}$$

und

$$\phi_i^m(t) = -\sum_{m=1}^n \frac{Gm_i M_m}{r_{i,m}(t)}$$

auf das Teilchen  $i$  permanent Einfluss. Ersteres gibt die Kraft durch die Zentralmasse, letzteres durch eventuell vorhandene Begleiter wieder (bei Planetenringen könnten z.B.  $n$  Monde die Ursache dieses Störterms sein – s. Kapitel 7).

In den Simulationen wird die wahre kontinuierliche Zeit diskretisiert, d.h. in sogenannte *Zeitschritte*  $\Delta t$  aufgeteilt, und für jeden dieser Zeitschritte die momentan auf das Teilchen  $i$  wirkenden Kräfte durch Gl. (2.1) berechnet. Für die Zeitdiskretisierung und die Berechnung der neuen Teilchenorte wurde der *Verlet*'sche Integrationsalgorithmus in der Form

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(t - \Delta t) + \ddot{\mathbf{r}}_i(t)\Delta t^2 \quad (2.2)$$



verwendet, wonach aus der Kenntnis der alten Teilchenorte  $\mathbf{r}_i(t - \Delta t)$ , der aktuellen Teilchenorte  $\mathbf{r}_i(t)$  und der aktuell einwirkenden Kräfte  $\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{F}_i(t)/m_i$  die neuen Orte (des nächsten Zeitintervalls) berechnet werden können. Danach können dann natürlich auch noch die aktuellen Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \left( \mathbf{r}_i(t + \Delta t) - \mathbf{r}_i(t - \Delta t) \right) / 2\Delta t \quad (2.3)$$

bestimmt werden, da die Kenntnis des neuen Ortes bereits vorhanden ist. Den *Verlet*-Algorithmus (2.2) kann man durch eine Taylor-Entwicklung der Funktion  $\mathbf{r}_i(t)$  bis zur zweiten Ordnung in  $\Delta t$  um den Zeitpunkt  $t$  sowohl mit dem Schritt  $\Delta t$  als auch mit  $-\Delta t$  gewinnen, indem man danach die beiden Taylor-Entwicklungen miteinander addiert. Dadurch heben sich dann die Terme erster und dritter Ordnung auf.

Die Vorteile des *Verlet*'schen Algorithmus gegenüber anderen Integrationsalgorithmen liegen in dem geringen Speicherbedarf, da bis zu dem Zeitschritt, in dem die Berechnung von  $\mathbf{r}_i(t + \Delta t)$  erfolgt, nur die alten und aktuellen Orte gespeichert werden müssen. Ferner sollte  $\Delta t$  nicht zu groß gewählt werden, da sonst die Impuls- und Energieerhaltung nicht mehr gewährleistet sind.

Nachteile ergeben sich zum Einen durch die Vernachlässigung von Termen höherer als die 3. Ordnung in  $\Delta t$  bei den Taylor-Entwicklungen, andererseits durch die auftretende Subtraktion einer kleinen Zahl  $\ddot{\mathbf{r}}_i(t)\Delta t^2$  von einer viel größeren  $2\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(t - \Delta t)$ , wodurch numerische Ungenauigkeiten auftreten können.

## 2.2. Bewegung im Zentralpotenzial

Zentralfelder üben auf in ihrer Nähe befindliche Körper Zentralkräfte aus, welche durch einen Richtungsvektor ausgezeichnet sind, der entweder in Richtung des Zentralkörpers oder von diesem weg orientiert ist. In dieser Arbeit handelt es sich um Teilchenbewegungen in einem attraktiven Zentralpotenzial, dessen Zentralkraft die Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r} \quad (2.4)$$

mit  $f(r) = -GmM_c/r^3 < 0$  besitzt.  $G$ ,  $m$  und  $M_c$  bezeichnen die Gravitationskonstante, die Masse des umlaufenden Körpers und die des Zentralkörpers. Wie in jedem Lehrbuch der klassischen Mechanik gezeigt, z.B. [7], liefern die *Newton*'schen Gleichungen für Potenziale dieser Art für die Bahnform des umlaufenden Teilchens in Polarkoordinaten  $r, \phi$

$$r(\phi) = \frac{k}{1 + \epsilon_{\text{ecc}} \cos(\phi)}, \quad (2.5)$$

$\epsilon_{\text{ecc}}$	Gesamtenergie $E$	Kegelschnitt	Beispiel
$> 0$	$> 0$	Hyperbel	Streutheorie
$= 1$	$= 0$	Parabel	Kometenbahnen
$< 1$	$< 0$	Ellipse	Planeten- und Kometenbahnen
$= 0$	$= -m_{\text{red}} G^2 m^2 M_c^2 / 2L^2 < 0$	Kreis	-

Tabelle 2.1.: Unterschiedliche numerische Exzentrizitäten  $\epsilon_{\text{ecc}}$  bedingen unterschiedliche Bahnformen und unterschiedliche Gesamtenergien  $E$ .

was der Gleichung eines allgemeinen Kegelschnittes entspricht. Hierin bedeuten  $k = L^2/GM_c m^2$  der Abstand vom Zentralkörper zum Punkt  $r(\phi = \pi/2)$  (s. Abb. 2.3) mit  $L = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$  als den Betrag des Teilchenbahndrehimpulses und  $\epsilon_{\text{ecc}} = (1 + 2Ek/GmM_c)^{1/2}$  die *numerische Exzentrizität* der Bahn mit  $E$  als die Gesamtenergie des Teilchens.

Je nach dem, welchen Betrags  $\epsilon_{\text{ecc}}$  ist, spezifiziert man den Kegelschnitt genauer. Für gebundene Bahnen, d.h. für Ellipsenbahnen, gilt für die Gesamtenergie eines Teilchens  $E = -GmM_c/2a < 0$  ( $a$  ist die große Halbachse) – s. Abb. 2.4 – und damit  $\epsilon_{\text{ecc}} < 1$  (s. Tab. 2.1). Diese heißen auch *Keplerbahnen*, wenn  $M_c \gg m$  ist, was in Hinsicht auf die Planetenbahnen im Sonnensystem das **1. Kepler'sche Gesetz** zum Ausdruck bringt. Die große Halbachse wird damit nur durch die Gesamtenergie bestimmt, während die kleine Halbachse  $b = -L^2/2Em$  sowohl durch die Gesamtenergie als auch durch den Drehimpuls beeinflusst wird.

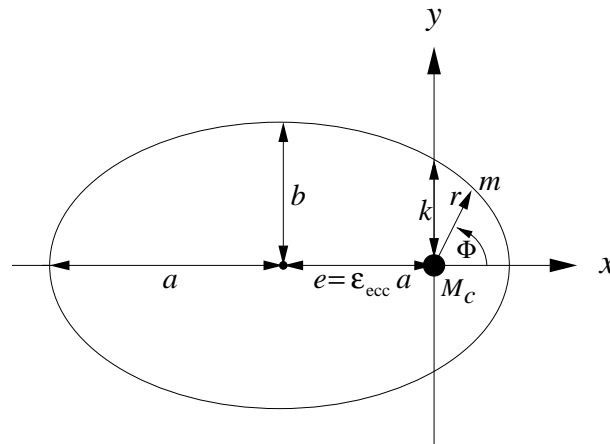


Abbildung 2.3.: Zur Veranschaulichung einer Kepler-Bahn. Die Zentralkörpermasse befindet sich immer in einem der beiden Ellipsenbrennpunkte. Die Simulationen z.B. zeigen (s. Abbn. 4.15 bis 4.18), dass sich die meisten Teilchen auf nahezu kreisförmigen Bahnen bewegen mit  $0 < \epsilon_{\text{ecc}} < 0.1$ .

Bei Drehimpulserhaltung, d.h. bleibt der Bahndrehimpuls des Teilchens über eine Periode konstant, bewegt sich das Teilchen auf einer Ebene, auf der  $\mathbf{L}$  senkrecht steht. Dann überstreicht der Radiusvektor  $\mathbf{r}$  des Massenpunktes  $m$  in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Dann ist im an  $M_c$  nächstgelegenen Punkt (*Perizentrum*)  $v_\phi$  am größten, im an  $M_c$  entferntestgelegenen Punkt (*Apozentrum*) am kleinsten. Dies besagt wiederum in Hinblick auf das Sonnensystem das **2. Kepler'sche Gesetz**. Abb. 2.3 zeigt die einzelnen eine Ellipse beschreibenden Größen, u.a. auch die *Exzentrizität*  $e = \epsilon_{ecc} a$ , welche den Abstand zwischen Ellipsenbrennpunkt und -schwerpunkt beschreibt. Für den Extremfall einer Ellipse, einem Kreis mit Radius  $r$ , sind  $\epsilon_{ecc} = e = 0$  und  $a = b = r$ , d.h. Brenn- und Schwerpunkt fallen zusammen.

J. Kepler formulierte im frühen 17. Jahrhundert dann auch das **3. Kepler'sche Gesetz** anhand von langjährigen Planetenbeobachtungen, was die Konstanz des Quotienten aus der Umlaufzeit eines Planeten der Masse  $m$  in zweiter Potenz zu seiner großen Halbachse in dritter Potenz deutlich macht

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_c + m)} \approx \frac{4\pi^2}{GM_c} = const. \quad (2.6)$$

Aus diesem Gesetz kann man auch den Betrag der Tangentialgeschwindigkeit des auf einer Keplerbahn laufenden Teilchens ableiten,

$$\mathbf{v}_\phi = \sqrt{\frac{GM_c}{r}} \mathbf{e}_\phi, \quad (2.7)$$

die auch die *Keplergeschwindigkeit* des Teilchens genannt wird. Zu ihr gelangt

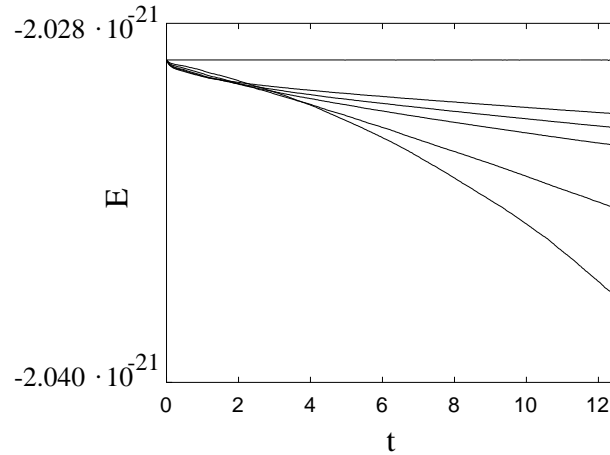


Abbildung 2.4.: Alle Simulationen zeigen, dass die Gesamtenergie  $E$  [ $M_\odot R_\odot^2 s^{-2}$ ] aller Teilchen negativ ist (d.h. es handelt sich um Keplerbahnen). Hier ist sie für Simulationen unterschiedlicher Kühlrate (Näheres zur Kühlung s. Kapitel 4.1) über die Zeit  $t$  [ $T_{Kep}$ ] aufgetragen.

man, wenn man für die Umlaufdauer  $T = 2\pi r/v_\phi$  und für angenäherte Kreisbahnen (wie sie die Planeten beschreiben)  $r \approx a$  setzt. Man beachte, dass die Keplergeschwindigkeit eine zeitlich gemittelte Größe pro Umlauf ist, die wahre Tangentialgeschwindigkeit jedoch zu unterschiedlichen Zeitpunkten (wenn auch nur minimal) davon abweicht. Sie ist vom Betrage her die größte Geschwindigkeitskomponente, d.h. insbesondere für den radialen Bereich  $r = 0.151 R_\odot$  gilt  $\langle v_\phi \rangle \gg \langle v_r \rangle \approx \langle v_z \rangle \approx 0$ . Dies ist verständlich, wenn man bedenkt, dass sich mit der Zeit genauso viele Teilchen sowohl in positive als auch in negative  $r$ - und  $z$ -Richtung bewegen, und daher die Annahme  $\langle v_r \rangle \approx \langle v_z \rangle \approx 0$  durchaus berechtigt ist. Dieses Verhältnis der mittleren Geschwindigkeitskomponenten zueinander sollte auch durch die Auswertungen der Simulationen zu Tage treten. Das genaue Vorgehen zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeitskomponenten ist in Anhang E genau erklärt und in den Abbn. 2.5 bis 2.7 gezeigt. Man sieht, dass die  $\langle v_r \rangle$ - und  $\langle v_z \rangle$ -Komponente zu kleineren Radien hin im Allgemeinen größere Werte annimmt als zu größeren. Das beruht auf den Effekt der zu kleineren Radien hin zunehmenden Heizrate (Näheres dazu ist im Kapitel 4.4 nachzulesen). Demgegenüber zeigt  $\langle v_\phi \rangle$  den aus der Theorie folgenden  $1/\sqrt{r}$ -Verlauf. Generell kann man durch Vorgabe der drei momentanen Orts- und Geschwindigkeitskomponenten eines Teilchens mit bekannter Masse alle hier eingeführten Größen, d.h. insbesondere die Bahnform, bestimmen (wie in Abschnitt 4.4 zur weiteren Analyse der Geschwindigkeitsdispersionskomponenten geschehen).

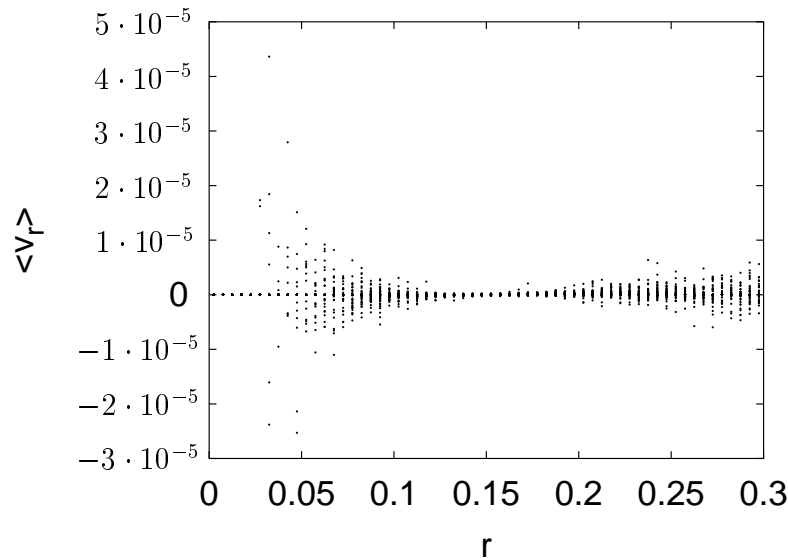


Abbildung 2.5.: Die in den einzelnen Teilringen über alle Teilchen gemittelte radiale Geschwindigkeitskomponente  $\langle v_r \rangle$  [ $R_\odot/s$ ] über den radialen Ort  $r$  [ $R_\odot$ ].

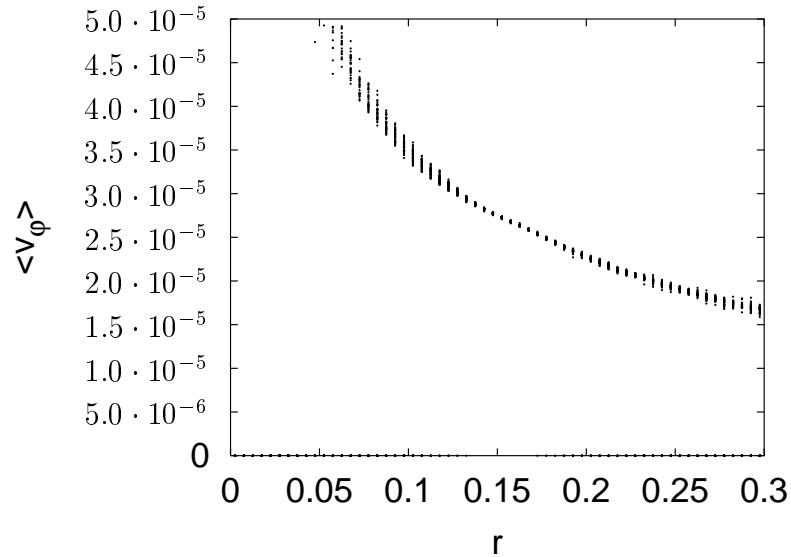


Abbildung 2.6.: Die in den einzelnen Teilringen über alle Teilchen gemittelte azimuthale Geschwindigkeitskomponente  $\langle v_\phi \rangle$  [ $R_\odot/s$ ] über den radialen Ort  $r$  [ $R_\odot$ ]. Man erkennt den  $1/\sqrt{r}$ -Verlauf gemäß Gl. (2.7) recht gut.

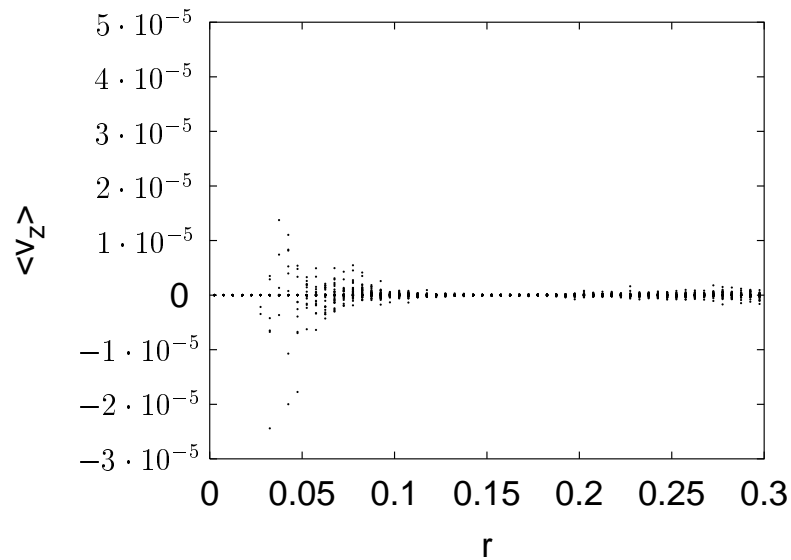


Abbildung 2.7.: Die in den einzelnen Teilringen über alle Teilchen gemittelte axiale Geschwindigkeitskomponente  $\langle v_z \rangle$  [ $R_\odot/s$ ] über den radialen Ort  $r$  [ $R_\odot$ ].

In der Realität verändern sich die räumlichen Lagen der Ellipsenbahnen der einzelnen Planeten des Sonnensystems mit der Zeit, so dass sich das Perihel (also der sonnennächste Punkt der Bahn) dreht. Diese Veränderung ist auf eine Störung des Gravitationspotenzials des betrachteten Planeten durch die anderen Planeten zurückzuführen, welche sich in der Funktion  $f(r)$  durch einen additiven Term der Form  $c/r^3$  äußert. Mit diesem Term bekommt man keinen Kegelschnitt in der Form von Gl. (2.5), sondern eine sogenannte Rosettenbahn, welche eine Periheldrehung bedingt. Allerdings zeigt der sonnennächste Planet Merkur eine größere jährliche Periheldrehung als die *Newton'sche* Gravitationstheorie auf Grund dieses Terms voraussagt. Eine Erklärung dafür liefert die Allgemeine Relativitätstheorie, welche durch diesen Störterm eine größere Anziehungskraft auf den Planeten bewirkt und damit ein größerer Winkel als  $\phi = 2\pi$  von Perihel zu Perihel durchlaufen wird. Dieser Effekt fällt natürlich mit der Entfernung von der Sonne ab (schwächer werdende Raumkrümmung durch die Sonne), weshalb er bei Merkur am deutlichsten auftritt und dadurch auch erst bekannt wurde.

## 2.3. Physikalische Vereinfachungen

Um den Zeitaufwand numerischer Rechnungen gering zu halten, kann man physikalische Probleme niemals exakt naturgetreu erfassen, sondern muss immer Näherungen oder Vereinfachungen beliebiger Art in Kauf nehmen, die dann in der Tat die wahren Verhältnisse nur noch beschränkt wiedergeben können. Natürlich muss man zusehen, dass die Natur dadurch nicht zu oberflächlich beschrieben wird. Vereinfachungen dieser Art sind z.B. die vernachlässigte Eigengravitation des Ringes, obwohl dieser im Falle des Saturn eine Masse von etwa  $10^{-12} M_{\odot}$  besitzt oder die Annahme von Ringteilchen gleichen Radius' und gleicher Materiedichte, obwohl dies für Planetenringe natürlich nicht der Fall sein kann. Auf die folgenden drei Vereinfachungen, die gleichfalls das Ziel einer Minimierung des Rechenzeitaufwandes haben, soll nun näher eingegangen werden.

### 2.3.1. Das Konzept der Pseudoteilchen

Da heutige Großrechner nicht in der Lage sind, die Trajektorien aller z.B. in einem planetarischen Ring vorkommenden Teilchen numerisch zu behandeln, besteht hinsichtlich des Rechenzeitaufwandes auf den für diese Arbeit zugänglichen Workstations die wohl größte Vereinfachung der Simulationen darin, dass nur einige  $10^3$  Teilchen numerisch behandelt werden (vorwiegend  $N = 9108$ ). Diese Teilchen werden dann als sogenannte *Pseudoteilchen* aufgefasst, da jedes für sich eine Ansammlung vieler realer Teilchen darstellt. Demgegenüber werden in Kapitel 1 Volumenelemente betrachtet, welche nach der Theorie hinreichend

viele dieser mikroskopischen Pseudoteilchen beinhalten. D.h., man hat sich drei „Teilchenarten“ vorzustellen:

- reale Teilchen (wie sie in der Natur vorkommen)
- mikroskopische Pseudoteilchen (wie sie in der Simulation behandelt werden)
- Volumenelemente (wie sie in der Hydrodynamik zu Grunde gelegt werden)

Will man bei der Teilchenerzeugung (s. Anhang D) die immense Teilchenzahl verkleinern, so muss man die Radien der Pseudoteilchen vergrößern. Dabei sollte ihre Massendichte entsprechend herab gesetzt werden, damit die gesamte Ringmasse konstant bleibt.

### 2.3.2. Die Methode der Linked Cells

Hierbei handelt es sich um eine Vereinfachung der Stoßüberprüfung zwischen den Ringteilchen, die im Vergleich zu anderen Methoden für große Teilchenzahlen, wie

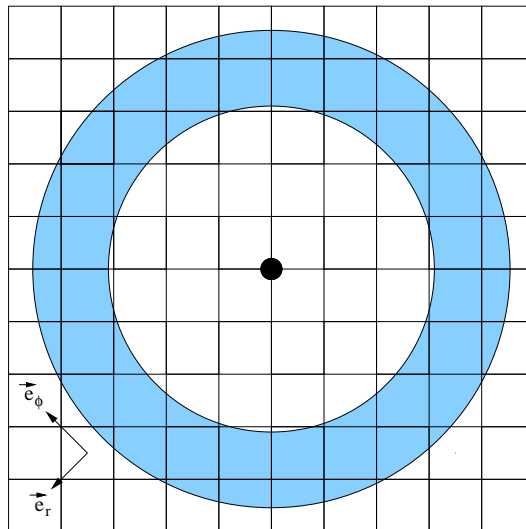


Abbildung 2.8.: Die  $r, \phi$ - bzw.  $x, y$ -Ebene des Systems, welches man sich in quaderförmige Linked Cells eingeteilt denken kann. Da bei Ringstrukturen sich die meisten Pseudoteilchen in einer Ebene befinden, wurde auf eine Unterteilung der  $z$ -Achse in gleicher Weise wie die hier gezeigte verzichtet. Die eingezeichneten Grundflächen der Quader haben eine Fläche von  $0.0015 \times 0.0015 R_{\odot}$ , während der mittlere Ringradius bei etwa  $0.15 R_{\odot}$  liegt (Figur nicht maßstabsgetreu).

sie im Rahmen dieser Arbeit angestrebt wurden, hinsichtlich des Rechenaufwandes am besten geeignet ist. Da es hinsichtlich der Programmierung wesentlich einfacher ist, ein Teilchen  $i$  auf Stoß mit *allen* anderen Teilchen zu überprüfen, aber der Rechenaufwand hierfür mit  $N^2$  anwächst, bietet die Methode der *Linked Cells* einen Zuwachs in der Rechenzeit linear mit  $N$  an ( $N$  sei die Gesamtteilchenzahl). Wenn in der Simulation alle  $z$  Zeitschritte ein Teilchen  $i$  nur mit Teilchen der unmittelbaren Nachbarschaft (andere Teilchen in derselben und in den angrenzenden Zellen) auf Stoß überprüft wird, muss zu dem entsprechenden Zeitpunkt die Nachbarschaft bekannt, d.h. eine Auswahl getroffen worden sein, *welche* der benachbarten Teilchen Stöße mit  $i$  machen können. Dieses Kenntnis von der Nachbarschaft ändert sich dann in einem Zeitintervall  $t + z\Delta t$  nicht mehr, obwohl die Nachbarschaft sich von Zeitschritt zu Zeitschritt ändert. Deshalb darf die Aktualisierung nicht zu selten vorgenommen werden. Es muss die Größe der Linked Cells so groß gewählt werden, dass sich die Teilchen auf Grund ihrer Geschwindigkeiten innerhalb der  $z$  Zeitschritte nicht oder nicht weit aus den Zellen bewegen. Im Programm-Code wurde die Zellgröße unter Berücksichtigung der im System auftretenden Teilchengeschwindigkeiten und eines optimalen Rechenaufwandes gewählt. Bei einer Kantenlänge von  $0.0015 R_{\odot}$  und einer mittleren Kepler-geschwindigkeit von etwa  $2.7 \cdot 10^{-5} R_{\odot}/s$  in der Ringmitte braucht ein Teilchen im Mittel etwa 55 Zeitschritte, um eine Zelle zu durchqueren. Der verwendete Aktualisierungszeitschritt beträgt  $z = 25$  Zeitschritte, liegt also unterhalb der akzeptablen Grenze. Ein zu groß gewähltes  $z$  würde sporadische Teilchenüberlapps ermöglichen, welche zu unrealistischen Sprüngen der kinetischen Energie führen. Dies ist also auch ein Kriterium für die Wahl von  $z$ . Da solche Sprünge nicht beobachtet wurden, kann man daher auch davon ausgehen, dass bei den Programmläufen  $z$  und die Zellgröße günstig gewählt wurden.

### 2.3.3. Die äußere Wand

Eine weitere Vereinfachung des Problems ist die Implementierung einer äußeren Wand, an der Teilchen, sobald sie sie berühren, vollkommen elastisch reflektiert werden, wobei natürlich die Impuls- und Energieerhaltung gewährleistet bleiben sollen. Mit der Einführung dieser Wand wird das effektive Simulationsvolumen verkleinert und die Simulation in der Weise verkürzt, dass durch Stöße so stark abgelenkte Teilchen aus dem Teilchenverband austreten und durch Stoß mit der äußeren Wand in das Simulationsvolumen zurück gelenkt, überflüssige Simulationszeit damit eingespart und dadurch schneller ein angestrebtes Systemgleichgewicht erreicht werden kann. Das Prinzip der äußeren Wand besteht darin, dass dasselbe Teilchen, welches wenige Zeitschritte zuvor reflektiert wurde, einem anderen Teilchen entspricht, das vor längerer Zeit an anderer Stelle aus dem Simulationsvolumen ausgetreten ist und zufällig hier wieder eintritt (s. Abb. 2.9). Bei niedriger Teilchendichte ist diese Annahme insofern gerechtfertigt, als man



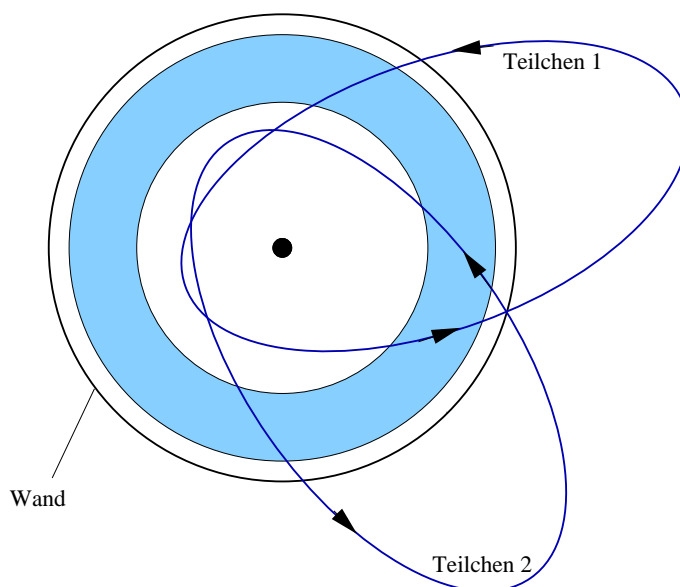


Abbildung 2.9.: Zur Veranschaulichung des Prinzips einer äußeren Wand. Teilchen 1 tritt aus dem Simulationsvolumen aus, ein anderes Teilchen 2 tritt genau an demselben Ort wieder ein und ersetzt dann im weiteren Verlauf der Bahn Teilchen 1.

nur einen kleinen Fehler in Kauf nimmt. Für hohe Dichten sollte die Annahme auf Grund einer größeren Anzahl von Stößen mit der Wand ebenfalls gerechtfertigt sein, müsste allerdings noch überprüft werden.



## 3. Grundlagen der kinetischen Theorie

In dieser Arbeit werden die dreidimensionalen scheiben- oder ringförmigen Systeme als Ansammlungen diskreter Teilchen betrachtet, auf die dann gewisse Aspekte der Kontinuumstheorie angewendet werden (s. Kapitel 5 und 6), um einen Übergang von der diskreten zur kontinuierlichen Beschreibung zu bewerkstelligen. Im Folgenden jedoch wird die diskrete Natur der Teilchen ein wenig unter dem für diese Arbeit relevanten Aspekt der kinetischen Theorie betrachtet.

### 3.1. Das Weiche-Kugel-Gas

Im Gegensatz zu dem Harte-Kugel-Gas, welches zeitlich infinitesimal kurze Kollisionen (= Ereignisse) zwischen den harten Teilchen erfährt und daher am besten mit *ereignis-getriebenen Methoden* zu simulieren ist (sie berechnen nur die durch die Kollision bedingten Teilchengeschwindigkeiten und setzen zwischen den Stößen eine gleichförmige Bewegung voraus), sind bei einem Weichen-Kugel-Gas (WKG) die Stöße zeitlich endliche Vorgänge, innerhalb derer die Teilchen überlappen, weshalb für dieses Teilchenmodell zeitschritt-gesteuerte *molekulardynamische Methoden* zur Simulation geeignet sind (hier werden die Teilchenorte und -geschwindigkeiten sowohl während als auch zwischen den Stößen numerisch berechnet → Abschnitt 2.3).

Bei der Molekulardynamik werden die momentan wirkenden Kräfte dazu benutzt, den neuen Ort des Teilchens (2. *Newton'sches Axiom*) zu berechnen. Die Rückstellkräfte während der Kollisionen sollen für den elastischen Stoß proportional mit dem Teilchenüberlapp anwachsen (*Hooke'sches Gesetz*), für den inelastischen Stoß noch zusätzlich durch ein Dämpfungsglied ergänzt werden [13], welches charakteristisch für den Inelastizitätsgrad des Stoßes sein soll.

Stoßen zwei Teilchen, s. Abb. 3.1, dann werden sie, abhängig von den Rückstellkräften, bis zu einem gewissen Grade überlappen. Der Betrag des Überlapps wird im Folgenden durch

$$\delta(t) = d - \left( \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.1)$$

repräsentiert, wobei  $d = R_1 + R_2 = 2R$  dem Durchmesser der Teilchen entspricht, wobei alle Teilchen denselben Radius  $R$  besitzen, und  $\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) / |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$

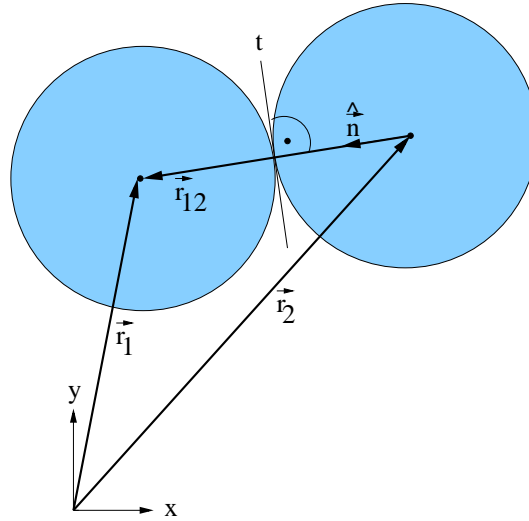


Abbildung 3.1.: Veranschaulichung der für einen Teilchenstoß relevanten Größen.  $\mathbf{r}_{12}$  ist senkrecht zur Ebene  $t$ , die den Kontaktpunkt beinhaltet. Weitere Erläuterungen hierzu s. Text.

der Normaleneinheitsvektor ist, der parallel zur Verbindungslinie der beiden Teilchenzentren und vereinbarungsgemäß in Richtung Teilchen 1 orientiert ist. Man erkennt damit, dass für Zeitpunkte  $t$ , an denen  $\delta(t) > 0$  ist, Überlapp und an denen  $\delta(t) < 0$  bzw.  $\delta(t) = 0$  ist, kein Überlapp herrscht. Die erste und zweite Zeitableitung der Überlappfunktion ergeben die Überlappgeschwindigkeit und -beschleunigung. Die Überlappbeschleunigung geht jeweils in die Bewegungsgleichungen der beiden Teilchen ein, wobei man beachten muss, dass auf Grund der Impulserhaltung die Kräfte auf beide Teilchen diametral entgegen wirken (und damit ein negatives Vorzeichen bei einer der beiden Bewegungsgleichungen eingeht). Setzt man die beiden Bewegungsgleichungen in die Gleichung für die Überlappbeschleunigung ein, so folgt die Bewegungsgleichung für den Überlapp z.B. für das Teilchen 2:

$$F_2^{(n)}(t) = m_{\text{red}} \ddot{\delta}(t) . \quad (3.2)$$

Hier ist  $F_2^{(n)}(t) = \mathbf{F}_2(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}$  die Kraftkomponente parallel zu  $\hat{\mathbf{n}}$  (ihr entgegen gerichtet ist dann  $\mathbf{F}_1(t)$ ) und  $m_{\text{red}} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m/2$  die *reduzierte Masse* für Teilchen gleicher Masse. Ersetzt man die Stoßkraft durch die *Hooke'sche* Rückstellkraft mit einem Dämpfungsglied, dann folgt die Bewegungsgleichung für die Zeit während eines Stoßes

$$m_{\text{red}} \ddot{\delta}(t) = -\nu_n \dot{\delta}(t) - k\delta(t) , \quad (3.3)$$

welche der gewöhnlichen Differentialgleichung eines harmonisch gedämpften Oszillators entspricht, wenn  $\omega_0^2 = k/m_{\text{red}}$  die Eigenfrequenz des ungedämpften

Schwingers und  $2\eta_n = \nu_n/m_{\text{red}}$  das Dämpfungsglied sind. Wegen den Einheitsbezeichnungen werden  $\eta_n$  als *effektive Viskosität* (nicht zu verwechseln mit der dynamischen Viskosität des Kapitels 1) und  $\nu_n$  als *Stoßviskosität* bezeichnet.  $k$  hat die Bedeutung einer *Federkonstante* (die hier verwendeten Einheiten sind in Anhang C besprochen). Die Lösung von Gl. (3.3) lautet

$$\delta(t) = \frac{v_0}{\omega} \exp(-\eta_n t) \sin(\omega t) . \quad (3.4)$$

$v_0$  ist die Teilchenrelativgeschwindigkeit unmittelbar vor dem Stoß (was später noch der zu besprechenden Geschwindigkeitsdispersion entspricht) und

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \eta_n^2} \quad (3.5)$$

die Eigenfrequenz des gedämpften harmonischen Oszillators. Im Allgemeinen wird die Stoßviskosität vorgegeben, und es muss auf  $\eta_n < \omega_0$  geachtet werden. Gl. (3.4) ist eine periodische Funktion, die bei  $t = 0$  und bei

$$t = \frac{\pi}{\omega} \equiv t_c \quad (3.6)$$

einen Nulldurchgang hat.  $t_c$  entspricht dann der Dauer eines Kontaktes [13].

### 3.1.1. Elastische und inelastische Stöße

Aus Gründen der Impulserhaltung folgen aus dem Impulsübertrag bei einem elastischen Stoß zweier gleich großer Teilchen gleicher Masse für die Geschwindigkeiten der beiden Teilchen für die Zeit  $t \geq t_c$

$$\mathbf{v}'_1(t) = \mathbf{v}_1(t) + \left( \mathbf{v}_{12}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \hat{\mathbf{n}} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{v}'_2(t) = \mathbf{v}_2(t) - \left( \mathbf{v}_{12}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \hat{\mathbf{n}} , \quad (3.8)$$

wobei  $\mathbf{v}_{12}(t) = \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)$  der Relativgeschwindigkeitsvektor und  $\mathbf{v}_{12}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = v_{12}^{(n)}$  die Relativgeschwindigkeit in Normalenrichtung ist. Da sich für vollkommen elastische Stöße  $\mathbf{v}_{12}$  im Vorzeichen umkehrt, gilt für die Differenz der Relativgeschwindigkeitsvektoren vor und nach dem Stoß  $v_{12}^{\prime(n)} - v_{12}^{(n)} = -2v_{12}^{(n)}$ . Eine Inelastizität kann man in diese Stoßgesetze einbauen, indem man einfach annimmt, dass aus der Normalengeschwindigkeit eines Teilchens nach dem Stoß

$$v_{12}^{\prime(n)} = \delta \left( \frac{\pi}{\omega} \right) = -v_{12}^{(n)} \exp \left( -\frac{\eta_n \pi}{\omega} \right) \quad (3.9)$$

für den Quotienten aus der Geschwindigkeit vor und nach dem Stoß

$$-\frac{v_{12}^{\prime(n)}}{v_{12}^{(n)}} = \exp \left( -\frac{\eta_n \pi}{\omega} \right) \equiv \epsilon_n \quad (3.10)$$

folgt, wenn  $\epsilon_n$  den *normalen Restitutionskoeffizienten* darstellt. Er ist ein Maß dafür, wieviel kinetische Energie der normalen Geschwindigkeitskomponenten durch einen Stoß dissipiert wird. Ein *tangentialer Restitutionskoeffizient*  $\epsilon_t$  würde auch benötigt werden, wenn man neben der normalen Energiedissipation auch eine tangentiale zuließe, d.h. wenn die Teilchenoberfläche rauh wäre und dadurch kinetische Energie tangentialer Geschwindigkeitskomponenten dissipiert würde. Da jedoch keine rauhen Teilchenoberflächen berücksichtigt werden, soll darauf nicht weiter eingegangen werden. Dann kann es im Folgenden auch keine Verwechslungen zwischen Normal- und Tangentialrichtung geben, weshalb der Index  $n$  weggelassen werden kann ( $\nu_n \rightarrow \nu, \eta_n \rightarrow \eta, \epsilon_n \rightarrow \epsilon$ ). Verwechslungen mit der kinematischen und dynamischen Viskosität  $\nu, \eta$  wird es in späteren Kapiteln nicht geben, da ein gemeinsames Auftreten nicht erfolgt.

Mit dem Restitutionskoeffizienten aus Gl. (3.10) folgen für die Geschwindigkeiten nach einem inelastischen Stoß

$$\mathbf{v}'_1(t) = \mathbf{v}_1(t) - \frac{1}{2}(1 + \epsilon) (\mathbf{v}_{12}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{v}'_2(t) = \mathbf{v}_2(t) + \frac{1}{2}(1 + \epsilon) (\mathbf{v}_{12}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} . \quad (3.12)$$

### 3.1.2. Energieverlust bei einem inelastischen Stoß

Wenn für eine Simulation eine von Null verschiedene Stoßviskosität gewählt wird, so beschert dies dem System eine Abkühlung. Die kinetische Energie der normalen Geschwindigkeitskomponenten, die bei einem inelastischen Stoß verloren geht, ist vom Betrage

$$\begin{aligned} \Delta E_{kin} &= E'_{kin} - E_{kin} & (3.13) \\ &= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}'_1{}^2 + \mathbf{v}'_2{}^2) - \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2) \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{4}(1 - \epsilon^2) m (\mathbf{v}_{12} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 . \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 4.1 gezeigt, wird dieser Energiebetrag bei jedem Stoß dem System entzogen, d.h. eine Kühlung ist die Folge.

### 3.1.3. Die Wahl des Zeitschrittes und der Federkonstante

Zur rasanteren Entwicklung eines Simulationslaufes ist man geneigt, den Zeitschritt  $\Delta t$  bezüglich einer systemtypischen Zeitskala (wie z.B. der Keplerperiode) groß zu wählen. Die Größe des Zeitschrittes bestimmt, wie im Folgenden gezeigt, die Wahl von  $k$  und  $\eta$ . Die Theorie des WKG gibt eine bestimmte Kollisionsdauer

$t_c$  für einen Stoß vor. Zur numerischen Integration muss die Kollisionsdauer ein Vielfaches des Zeitschrittes betragen,  $t_c = z\Delta t$ , um noch eine hinreichend hohe Genauigkeit des Stoßvorganges zu erzielen. Auf der sicheren Seite befindet man sich, wenn man großzügig  $z = 40 \dots 100$  wählt (für die Simulationen war immer  $z = 60$ ). Wird nämlich  $\Delta t$  hinsichtlich der im System auftretenden Stoßgeschwindigkeiten zu groß gewählt, dann kann es einerseits zu numerischen Ungenauigkeiten kommen, andererseits kann es durchaus sein, dass zwei stoßende Teilchen während der Zeitspanne von einem Zeitschritt einen Weg zurücklegen, der größer ist als ein Teilchendurchmesser. Bei gegebenem  $k$  würde dies den Energieerhaltungssatz verletzen, da ihre Zentren näher kommen können als  $k$  erlaubt. Daher würden dann größere kinetische Energien resultieren als physikalisch sinnvoll und man hätte dann bei jedem Stoß eine Quelle kinetischer Energie.

Will man diesen Umstand vermeiden und trotzdem  $\Delta t$  groß wählen, so muss gemäß Gl. (3.5) die Eigenfrequenz  $\omega$  des gedämpften harmonischen Oszillators entsprechend gesenkt werden. Da nun  $\omega$  von  $k$  und  $\eta$  abhängt, müssen diese entsprechend gewählt werden: d.h. letztendlich führt die Wahl von  $\Delta t$  zur Bestimmung von  $k$  bei vorgegebenem  $\eta$ , denn aus Gl. (3.5) erhält man für die Federkonstante

$$k = \frac{m}{2} \left( \frac{\pi^2}{z^2 \Delta t^2} + \frac{\nu_n^2}{m^2} \right). \quad (3.14)$$

Um nun für eine größere Kollisionsdauer aber den normalen Restitutionskoeffizienten  $\epsilon$  konstant zu lassen (man möchte ja nur die Simulation beschleunigen, die Physik jedoch beibehalten), muss  $\eta$  entsprechend Gl. (3.10) um denselben Faktor gesenkt werden wie  $t_c$  erhöht wird. Aus Gl. (3.14) kann man ersehen, dass die Diskriminante von Gl. (3.5) immer positiv, d.h.  $2mk \geq \nu_n^2$  erfüllt ist.

Wenn man nun noch bei den auftretenden Kollisionen für  $t = t_c/2 = \pi/2\omega$  einen maximalen Überlapp  $\delta_{\max} = (v_{12}^{(n)}/\omega) \exp(-\eta\pi/2\omega)$  der Teilchen von  $p_{\max}$  % des Radius' zulässt, so kann aus der Lösung (3.4) die zugeordnete maximale Relativgeschwindigkeit zu Beginn des Stoßes errechnet werden

$$v_{12}^{(n),max} = \mathbf{v}_{12}^{max} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{Rp_{\max}}{100} \frac{\pi}{z\Delta t} \exp\left(\frac{1}{2}\eta z\Delta t\right). \quad (3.15)$$

Diese Gleichung gibt nun für eine gegebene effektive Stoßviskosität und Kollisionsdauer eine bestimmte Relativgeschwindigkeit an, welche vereinbarungsgemäß nicht überschritten werden sollte. D.h. die sich im System einstellende Temperatur (s. Abschnitt 4) sollte Relativgeschwindigkeiten bedingen, die immer unter dieser Grenze liegen. Treten höhere auf, dann wird es größere Überlappungen als die erwünschte geben. Z.B. ist in Anlehnung an die Realität eine Grenze von  $p_{\max} = 10$  % in den Simulationen gewählt, da größere Überlappungen nicht der Realität entsprechen, denn ein Überlapp von z.B. weit mehr als 10 % zwischen Festkörpern wird sicherlich zu einem Zerfall in Fragmente führen, was in den hier

vorgestellten Simulationen nicht berücksichtigt wird. Die Simulationen zeigen jedoch Relativgeschwindigkeiten, die mindestens um einen Faktor 10 unter dieser Grenze liegen, bei stark dissipativen Simulationen ist der Faktor noch viel höher.

## 3.2. Wichtige kinetische Größen für diskrete $N$ -Teilchen-Systeme

### 3.2.1. Die optische Tiefe

Obwohl diese Größe nicht direkt in das Gebiet der kinetischen Theorie fällt, stellt sie doch ein Maß für die Dichte des diskreten  $N$ -Teilchen-Systems dar. Die optische Tiefe

$$\tau = \frac{\Sigma \pi R^2}{m} = \frac{N \pi R^2}{\Delta A} \quad (3.16)$$

projiziert die Gesamtzahl  $N$  aller in einem Teilring befindlichen Teilchenquerschnittsflächen  $\pi R^2$  auf dessen Grundfläche  $\Delta A$ , was in Abb. 3.2 zur Veranschau-

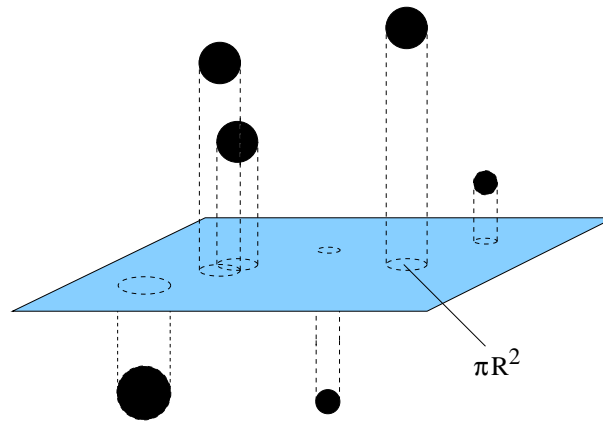


Abbildung 3.2.: Zur Veranschaulichung der Berechnung der optischen Tiefe  $\tau$ . Die Summe der Querschnittsflächen aller Teilchen innerhalb eines Teilringes werden auf die Grundfläche des Teilringes projiziert.

lichung gezeigt ist.  $\Sigma$  ist hier die aus der Simulation zu gewinnende Flächendichte des entsprechenden Teilringes (Projektion der Massen aller Teilchen des Teilringes auf seine Grundfläche). Die optische Tiefe der Ringe nimmt beim Zerfließen, wie Abb. 3.3 zeigt, mit der Zeit natürlich ab, was eine Verringerung ihrer örtlichen Teilchenzahldichten bedeutet. Die Simulation für den Fall mit  $\epsilon = 1.00$  zeigt ein zeitlich stärkeres Abfallen der optischen Tiefe als der sehr dissipative Fall



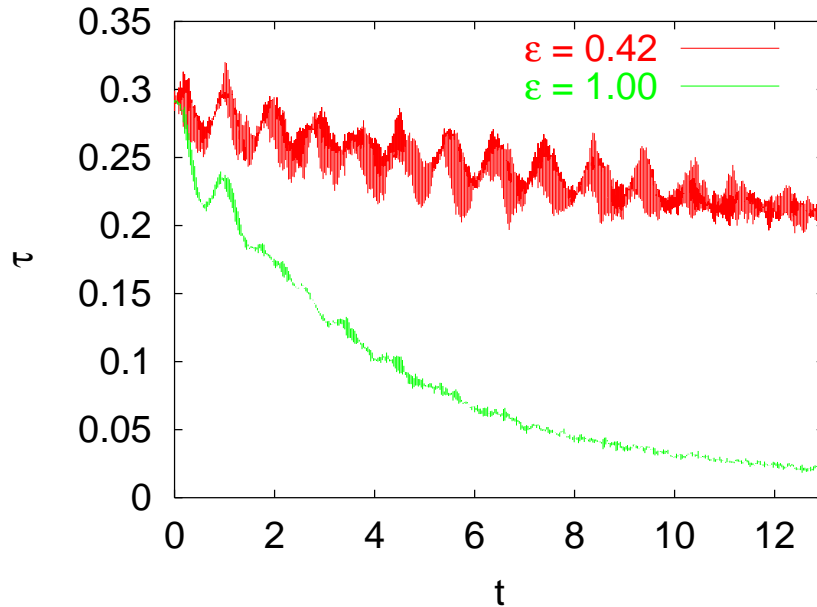


Abbildung 3.3.: Die optische Tiefe  $\tau$  über die Zeit  $[T_{\text{Kep}}]$  aufgetragen für zwei unterschiedlich dissipative Systeme  $\epsilon = 1.00$  und  $\epsilon = 0.42$ . Ihr zeitlicher Verlauf ist für die Ringmitte bei  $r = 0.151 R_{\odot}$  dargestellt.

$\epsilon = 0.42$ , d.h. er zerfließt schneller. Beide Simulationen haben eine anfängliche optische Tiefe von  $\tau \approx 0.3$ .

### 3.2.2. Mittlere freie Weglänge und Kollisionsfrequenz

Eine wichtige Beschreibungsgröße für ein Gas ist z.B. die *mittlere freie Weglänge* eines Teilchens im System. Das ist der Weg, den ein Teilchen zwischen zwei Stößen zurücklegt, gemittelt über viele Stöße. Da die Stöße umso häufiger werden, je dichter das System ist, kann die mittlere freie Weglänge im Ring über den radialen Ort unterschiedliche Werte annehmen. Sicherlich ist der klassische Ausdruck

$$\lambda = \frac{1}{4\pi R^2 n} \quad (3.17)$$

ein geeignetes Maß für die mittlere freie Weglänge für Gase mit nicht allzu hoher optischer Tiefe. Diesen Ausdruck kann man leicht ableiten, wenn man für die Teilchendichte  $n = N/V$  ein Volumen annimmt, welches Zylinderform besitzt (Länge  $L$ , Grundfläche  $\pi(2R)^2 =$  doppelte Teilchenfläche) und in dem sich das betrachtete Teilchen über die gesamte Länge bewegen kann, ohne dass es ein anderes Teilchen stößt (per definitionem ist dann  $L = \lambda$ ). D.h. aus  $n = N/V = 1/4\pi R^2 \lambda$

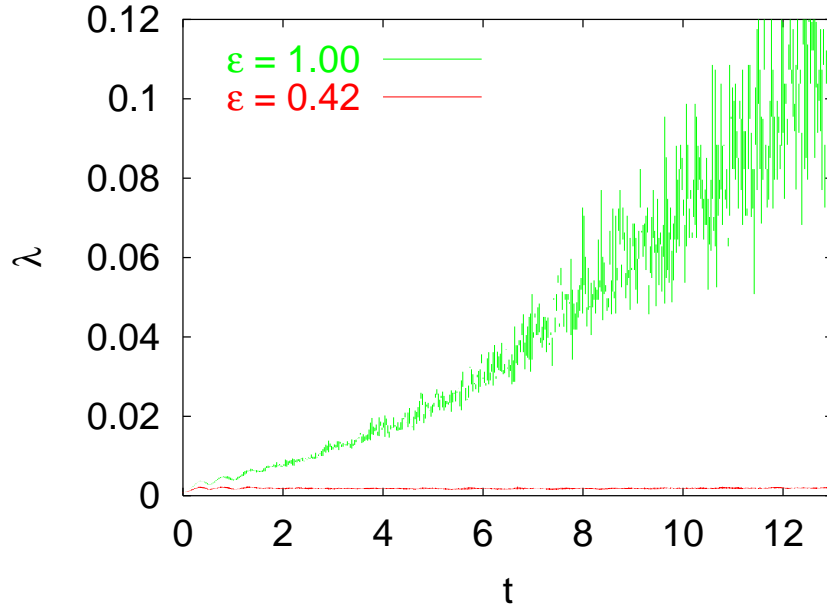


Abbildung 3.4.: Mittlere freie Weglänge  $\lambda$  [ $R_{\odot}$ ], berechnet nach Gl. (3.17), für zwei unterschiedlich dissipative Systeme, aufgetragen über die Zeit [ $T_{\text{Kep}}$ ] im Auswertungsvolumen  $0.147 R_{\odot} < r < 0.153 R_{\odot}$ ,  $-0.0005 R_{\odot} < z < 0.0005 R_{\odot}$ .

folgt Gl. (3.17). Eine genauere Berechnung der mittleren freien Weglänge für Teilchen in Gasen ist von *Enskog* durchgeführt worden, auf die jedoch hier nicht näher eingegangen werden soll. Näheres dazu (in  $2D$ -Form) ist in [18] nachzulesen. Einen auf dieser klassisch bestimmten mittleren freien Weglänge basierenden Ausdruck für die Kollisionsfrequenz pro Teilchen stellt

$$\omega_c = \frac{v_T}{\lambda} \quad (3.18)$$

dar, welcher natürlich anwächst, wenn die Relativgeschwindigkeit  $v_T$  größer und / oder die mittlere freie Weglänge des Teilchens kleiner wird. Die Größen (3.17) und (3.18) kann man aus den Simulationen bestimmen (s. Anhang E), wenn man hinreichend kleine Volumina auswertet, in denen eine *homogene* Teilchenzahldichte ( $n = \text{const.}$ ) angenommen werden kann. D.h. die Ränder des Teilchenaggregats dürfen nicht innerhalb des Auswertungsvolumens liegen, da dort der Teilchenkonzentrationsgradient sehr groß ist und die Ergebnisse verfälscht werden. Bei der rechnerischen Bestimmung von  $\omega_c$  nach Gl. (3.18) ist also ein Auswertungsvolumen zu Grunde gelegt worden, welches einem Teilring um  $r = 0.151 R_{\odot}$  mit hinreichend kleiner axialer Höhe entspricht. Damit wird sicher gestellt, dass die Verteilung der Teilchen in diesem Auswertungsvolumen so weit wie möglich homogen ist. Die Abb. 3.4 und 3.5 zeigen die klassische mittlere freie Weglänge

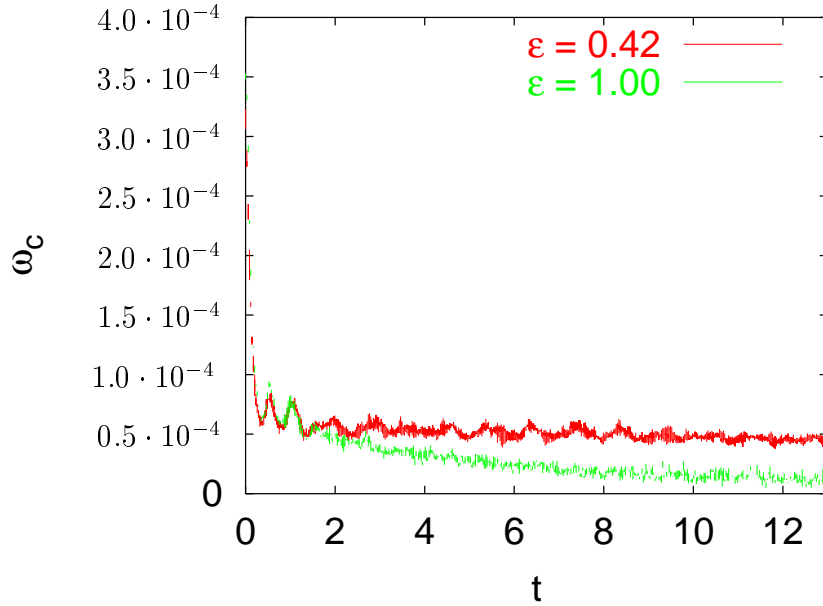


Abbildung 3.5.: Kollisionsfrequenz pro Teilchen  $\omega_c$  [ $s^{-1}$ ], berechnet nach Gl. (3.18), für zwei unterschiedlich dissipative Systeme, aufgetragen über die Zeit  $[T_{\text{Kep}}]$  im Auswertungsvolumen  $0.147 R_{\odot} < r < 0.153 R_{\odot}$ ,  $-0.0005 R_{\odot} < z < 0.0005 R_{\odot}$ .

und die daraus bestimmte Kollisionsfrequenz pro Teilchen für das Auswertungsvolumen  $0.147 R_{\odot} < r < 0.153 R_{\odot}$ ,  $-0.0005 R_{\odot} < z < 0.0005 R_{\odot}$ . Die mittlere freie Weglänge nimmt natürlich für  $\epsilon = 1$  mit der Zeit zu, da der Ring von Anfang an noch nicht im Gleichgewicht ist und seine mittlere Teilchendichte abnimmt. Für den dissipativen Fall  $\epsilon = 0.42$  bleibt sie ungefähr konstant, was darauf schließen lässt, dass der Ring kaum (radial und vertikal) zerfließt (dazu in den Kapiteln 5 und 6 mehr). Die Kollisionsfrequenz pro Teilchen nimmt für den dissipationfreien Fall permanent ab, da nach Gl. (3.18)  $\lambda$  stärker zunimmt als  $v_T$  (wie später in Kapitel 4 noch zu sehen sein wird, nehmen für dissipationfreie und schwach dissipative Systeme die Temperatur und damit die Relativgeschwindigkeiten mit der Zeit zu). Gleiches gilt für den dissipativen Fall.

Abb. 3.6 zeigt für das dissipationfreie System die experimentelle Überprüfung aller momentanen Kollisionen im gesamten System, während sich Abb. 3.7 nur auf das besagte Auswertungsvolumen beschränkt und damit natürlich weniger Kollisionen pro Zeitschritt zeigt. Für den dissipationlosen Fall ist ab dem Zeitpunkt  $t = 4 T_{\text{Kep}}$  alle  $10^3$  s die Gesamtzahl  $C_i$  aller Überlappungen in dem jeweils aktuellen Zeitschritt detektiert worden (bei einer Simulationszeit von  $10^5$  s sind das  $M = 360$  Momentaufnahmen) und ausgegeben. Wenn  $\sum_i C_i$  mit  $i = 1 \dots 360$  die Summe aller ausgegebenen Werte bezeichnet, ergibt  $(1/M) \sum_i C_i$  den über

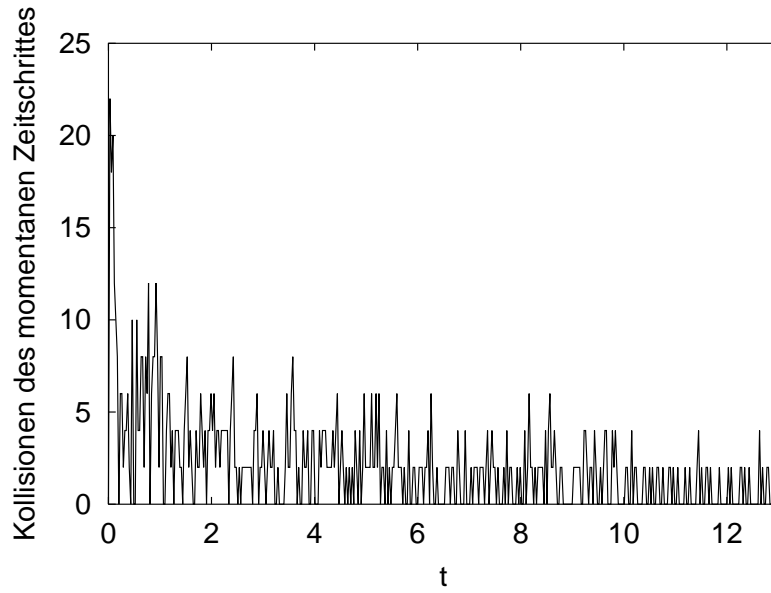


Abbildung 3.6.: Die aus der Simulation mit  $\epsilon = 1.00$  folgende Anzahl aller pro Zeitschritt stattfindenden Kollisionen im gesamten Ring mit  $N = 9108$ , aufgetragen über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ].

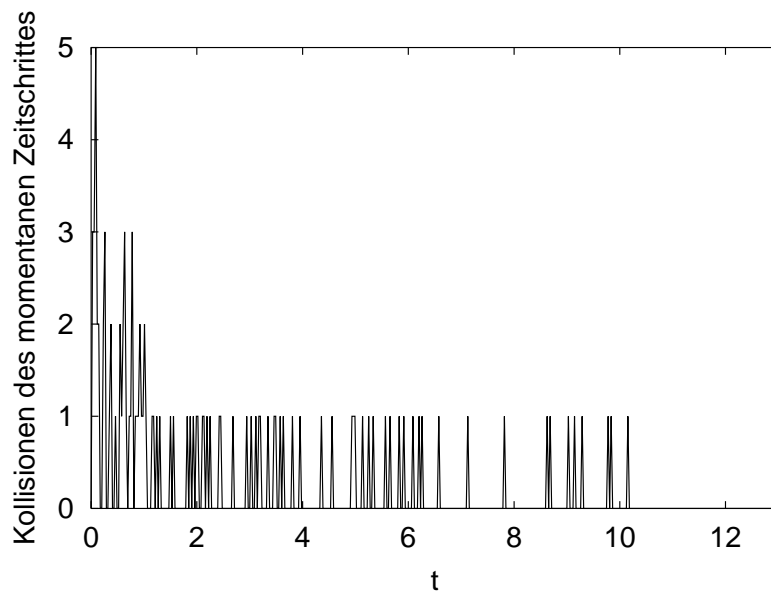


Abbildung 3.7.: Die aus der Simulation mit  $\epsilon = 1.00$  folgende Anzahl aller pro Zeitschritt stattfindenden Kollisionen im Auswertungsvolumen  $0.147 R_{\odot} < r < 0.153 R_{\odot}$ ,  $-0.0005 R_{\odot} < z < 0.0005 R_{\odot}$ , aufgetragen über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ].

alle Momentaufnahmen gemittelten Wert der Überlappungen pro Zeitschritt, d.h. einen repräsentativen Wert. Diesen durch die allgemeine Kollisionsdauer  $t_c$  geteilt, ergibt die Kollisionsfrequenz *aller* Teilchen im gesamten System. Ein Faktor 2 ist zudem noch vonnöten, da pro Teilchenkontakt 2 Teilchen bei einem Stoß beteiligt sind. Die Kollisionsfrequenz *pro* Teilchen ergibt sich, wenn man den so erhaltenen Wert durch die Anzahl der im System befindlichen Teilchen dividiert. Da sich die Teilchenzahl mit der Zeit für das ausgeschnittene Volumen ändert, gilt für die Kollisionsfrequenz pro Teilchen

$$f_c = \frac{2}{t_c} \left( \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{C_i}{N_i} \right). \quad (3.19)$$

Damit folgt für  $\epsilon = 1.00$  für das besagte Volumen eine Kollisionsfrequenz pro Teilchen  $f_c \approx 4.75 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , was in etwa in derselben Größenordnung liegt, wie die in Abb. (3.5) gezeigte Kollisionsfrequenz (pro Teilchen). Damit ist zumindest eine näherungsweise Übereinstimmung von Theorie mit der Simulation gelungen.

### 3.2.3. Die Scherviskosität

Befindet sich ein Gas im Gleichgewichtszustand (d.h. die das Gas beschreibende thermodynamische Größen wie Temperatur, Dichte und mittlere Geschwindigkeit sind zeitlich konstant), dann werden die Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen *Maxwell-Boltzmann*-verteilt sein. Stellt sich aus irgendeinem Grunde lokal ein Nicht-Gleichgewicht im System ein, dann versucht das System, dieses Nicht-Gleichgewicht durch den Transport bestimmter Größen auszugleichen und damit einen energetisch günstigeren Zustand anzustreben. Transportierte Größen können Teilchen (= Diffusion), Impuls (= innere Reibung durch Stöße) oder Energie (= Wärmeleitung) sein. In den im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Systemen ist der Effekt der inneren Reibung ein sehr wichtiger, weshalb hier nur auf ihn eingegangen werden soll. Auf Grund unterschiedlicher Keplergeschwindigkeiten werden benachbarte Teilchenschichten eine differenzielle Rotation über den gesamten Ring bedingen, was zu inneren Reibungen zwischen diesen Schichten führt und damit in Bezug auf die bereits besprochene Hydrodynamik sogenannte Nebendiagonalelemente im viskosen Spannungstensor auftreten lässt. Diese Scherspannungen sind letztendlich der Grund für einen radialen Transport von Impuls: innere schnellere Schichten werden abgebremst, während benachbarte äußere Schichten einen Zuwachs des azimuthalen Impulses erfahren, d.h. die azimuthale Impulskomponente wird radial transportiert.

Der Proportionalitätsfaktor zwischen Spannungskraft pro Flächeneinheit und dem Geschwindigkeitsgradienten entspricht der dynamischen Viskosität  $\eta$ , wie sie be-

reits in Kapitel 1.4.2 eingeführt wurde:

$$T_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} . \quad (3.20)$$

Dies ist die kartesische Darstellung des relevanten Nebendiagonalelements des viskosen Spannungstensors (s. Abb. 3.8), andererseits aber auch eine Komponente des in Abschnitt 1.2 eingeführten Geschwindigkeitsgradienten, während in Anhang A die für die betrachteten Systeme geeignete zylindrische Form zu finden ist. Wie z.B. in [1] nachzulesen, liefert die Transporttheorie für die Proportiona-

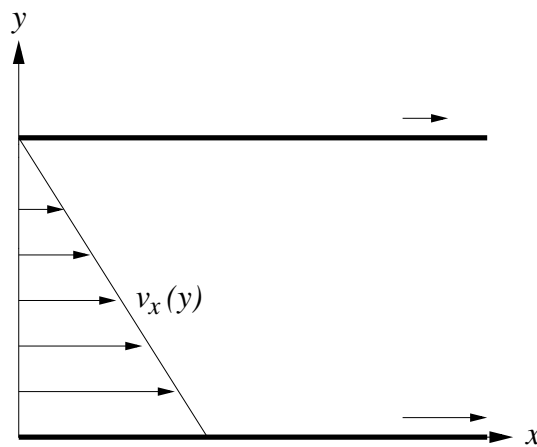


Abbildung 3.8.: Veranschaulichung der wirkenden Scherspannungen. Die obere Schicht bewegt sich langsamer in  $x$ -Richtung als die untere. Folglich treten Spannungskräfte parallel zur  $x$ -Richtung auf.

litätskonstante

$$\eta \approx mnv_T \lambda = \rho v_T \lambda , \quad (3.21)$$

wenn man Systeme mit moderater Dichte betrachtet. Mit der Form (3.17) für die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  erweist sich die dynamische Viskosität als dichteunabhängig:

$$\eta \sim v_T . \quad (3.22)$$

Für die kinematische Viskosität ergibt sich damit dann

$$\nu = \eta / \rho \sim v_T / \rho . \quad (3.23)$$

## 4. Die Rolle der Temperatur im System

### 4.1. Die Energie im System

Wie bereits erwähnt, besitzen Akkretionsscheiben eine andere Geometrie als planetarische Ringe. Während planetarische Ringe eine Massenverteilung besitzen, die den hier erzeugten und in Anhang D beschriebenen Verteilungen ähnelt, besitzen Akkretionsscheiben eine in der  $z$ -Dimension etwas kompliziertere Struktur, denn die  $z$ -Ausdehnung ist bei ihnen für größere radiale Abstände größer als für kleinere. Die Wechselwirkung zwischen den Körpern bzw. Gasmassen ist durchaus von großer Bedeutung für die zeitliche Entwicklung dieser Teilchenaggregate, zumal dissipative Wechselwirkungen in der Realität die Regel sind. Bei Planetenringen können tief inelastische Stöße (Umwandlung von Bewegungsenergie der Teilchen in innere Energie) eine Deformation der Teilchen oder einen Zerfall in Bruchstücke bedingen und für eine Senkung des Gesamtenergiehaushalts sorgen. Bei akkretierenden Gas- und Staubscheiben um Zentralgestirne tritt eine Energiesenke in der Weise auf, dass Teilchen letztendlich – nachdem sie einige Male die Zentralmasse umlaufen haben – in dieselbe hineingezogen werden können und damit dem System Energie entzogen wird. Andererseits besitzen diese Ringe und Scheiben den gemeinsamen Effekt der differentiellen Rotation, welcher zu einer Heizung des Systems führt. Akkretionsscheiben bekommen zudem noch kinetische Energie zugeführt, da ihnen Masse vom Begleitstern zukommt. Heizung und Massenzufuhr entsprechen einer Quelle kinetischer Energie. Im Falle von Akkretionsscheiben wird die dadurch auftretende Reibungswärme in Form von Strahlung, welche vorwiegend im Röntgenbereich liegt, abgegeben. Solche Objekte nähren sogenannte Röntgendoppelsterne, welche im Allgemeinen kompakte Zentralmassen (Weiße Zwerge, Neutronensterne oder Schwarze Löcher) haben, die von einem normalen Begleitstern umlaufen werden und von dem sie Masse abziehen, welche dann auf Grund der Drehimpulserhaltung zuerst eine Akkretionsscheibe bildet, um dann von dem massiven Zentralobjekt geschluckt zu werden. Im Falle von planetarischen Ringen äußert sich der dadurch entstehende Energiegewinn natürlich nicht in einer Abstrahlung, sondern in einem Anstieg der (kinetischen) Gesamtenergie des Systems, wie in den folgenden Abschnitten noch deutlich wird.

### 4.1.1. Granulare Temperatur und Geschwindigkeitsdispersion

Hat man einmal für ein azimutalsymmetrisches System eine zuverlässige Definition der Temperatur gefunden und diese für die Simulationen bestimmen können (vgl. dazu Anhang B), dann kann man einige Aussagen über die energetischen Verhältnisse im System treffen.

Die Gesamttemperatur des Systems wird im Folgenden durch Gleichsetzen des thermodynamischen Gesamtenergiebegriffs  $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}k_B T$  und der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_T^2$  gewonnen, wobei  $T$  bzw.  $v_T$  die Gesamttemperatur bzw. die der Gesamttemperatur zugeordnete Fluktuationgeschwindigkeit sind, und äußert sich in

$$T = \frac{m}{3}v_T^2 = \frac{m}{3} (\langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2) . \quad (4.1)$$

Hierin sind  $m$  die Teilchenmasse und  $\mathbf{v} = (v_r, v_\phi, v_z)^T$  der Gesamtgeschwindigkeitsvektor. Hier und im Folgenden bedeutet

$$v_T = \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2} \quad (4.2)$$

auch die gesamte *Geschwindigkeitsdispersion* der Teilchen, bei der die azimutale Hauptgeschwindigkeitsströmung der Teilchen extrahiert ist und die deshalb ungefähr der Relativgeschwindigkeit der Teilchen untereinander entspricht. Die Geschwindigkeitsdispersion ist eine aus den Simulationen zu gewinnende Größe.

### 4.1.2. Inelastische Teilchenkollisionen - eine Energiesenke

Wird der normale Restitutionskoeffizient  $\epsilon < 1$  gewählt, dann wird dem System mit jedem Teilchenstoß kinetische Energie entzogen. Das bedeutet, dass es mit der Zeit abkühlt und irgendwann ein Gleichgewicht erreicht, welches durch sogenannte *nichtlokale Transportprozesse* aufrecht erhalten wird. Hierauf wird jedoch nicht näher eingegangen. Die kinetische Energie, die dem System bei einem Zwei-Teilchen-Stoß entnommen wird, ist vom Betrage her

$$\Delta E_{\text{koll}} = \frac{1}{4} (1 - \epsilon^2) m v_T^2 . \quad (4.3)$$

Hierbei wird wiederum von der Vereinfachung Gebrauch gemacht, dass alle Teilchen denselben Radius und bei gleicher Materiedichte dieselbe Masse besitzen mögen. Betrachtet man die zeitliche Rate, mit der kinetische Energie dem System entzogen wird, so ist einfach Gl. (4.3) mit der Kollisionsfrequenz pro Teilchen zu multiplizieren:

$$\frac{dE_{\text{koll}}}{dt} = \frac{1}{4} (1 - \epsilon^2) m v_T^2 \omega_c . \quad (4.4)$$



$\dot{E}_{\text{koll}}$  stellt nun den Betrag an kinetischer Energie dar, der pro Zeiteinheit dem System durch Kollisionen verloren geht, wenn  $\omega_c$  die Anzahl der Kollisionen pro Teilchen während dieser Zeiteinheit ist.

### 4.1.3. Differenzielle Rotation - eine Energiequelle

Da die Teilchen im Zentralpotenzial auf Bahnen laufen, die durch die Kepler-Gesetze beschrieben werden, ist ihre Tangentialgeschwindigkeit streng von ihrem Abstand vom Zentralteilchen abhängig, also  $\sim r^{-1/2}$ . Damit existiert ein Geschwindigkeitsgradient in  $r$ -Richtung, der in Richtung Zentralmasse orientiert ist. Betrachtet man die Teilchen zweier sehr dünner benachbarter Teilringe (um den Abstand  $\Delta r$  voneinander entfernt), so besitzen die Teilchen im zur Zentralmasse näher gelegenen Teilring eine um den Betrag  $\Delta v_\phi$  größere Keplergeschwindigkeit als die Teilchen im entfernteren Teilring. Der Geschwindigkeitsgradient über diese Distanz lautet dann

$$\frac{\Delta v_\phi}{\Delta r} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM_c}{r^3}} = -\frac{1}{2} \Omega, \quad (4.5)$$

wobei  $\Omega$  die *Keplerfrequenz* bedeutet. Überführt man Gl. (4.5) in die Form der kinetischen Energie und ersetzt den Abstand der Teilringe durch die mittlere freie (radiale) Weglänge, d.h.  $\Delta r \approx \lambda$ , so folgt

$$\Delta E_{\text{visk}} = \frac{1}{2} m (\Delta v_\phi)^2 = \frac{1}{8} m \Omega^2 \lambda^2, \quad (4.6)$$

oder entsprechend der Gl. (4.4) die zeitliche Rate, mit der das System geheizt wird,

$$\frac{dE_{\text{visk}}}{dt} = \frac{1}{8} m \Omega^2 \lambda^2 \omega_c. \quad (4.7)$$

$\dot{E}_{\text{visk}}$  hängt also von der Änderung der Keplergeschwindigkeit über eine gegebene radiale Distanz ab (Gl. (4.5) bringt dies zum Ausdruck). Je größer das Geschwindigkeitsgefälle ist (z.B. weil die Zentralmasse größer ist oder beide Teilringe näher an ihr liegen), desto größer muss dann auch die Heizrate sein, da die auftretenden Scherkräfte zunehmen. Tab. 4.1 zeigt für bestimmte radiale Orte  $r$  die entsprechenden Relativkeplergeschwindigkeiten  $v_{\text{Kep,rel}}$ . Eine Konsequenz dieser stärkeren viskosen Reibung an kleineren Orten  $r$  ist dort eine stärkere Heizung. Dies ist in den Abbn. 4.10 und 4.11 in Abschnitt 4.4 eindrucksvoll zu erkennen.

In einer differenziell rotierenden Scheibe aus Gas oder granularem Medium treten immer viskose Scherspannungen auf, welche kontinuierlich Energie der geordneten Bewegung (Keplerbewegung) in ungeordnete Bewegung (radiale und axiale Komponenten = Geschwindigkeitsdispersion) umwandeln. Auf Grund dieser

$r [R_{\odot}]$	$v_{\text{Kep,rel}} [R_{\odot}/\text{s}]$
0.18	$3.544 \cdot 10^{-5}$
0.16	$3.760 \cdot 10^{-5}$
0.15	$3.883 \cdot 10^{-5}$
0.14	$4.019 \cdot 10^{-5}$
0.12	$4.341 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 4.1.: Relative Keplergeschwindigkeiten  $v_{\text{Kep,rel}}$  zweier sich im Abstand von einem Teilchenradius  $R = 3.93 \cdot 10^{-4} R_{\odot}$  begegnenden Teilchen, deren Schwerpunkt sich im Abstand  $r$  von der Zentralmasse  $M_c = 2.9 \cdot 10^{-4} M_{\odot}$  befindet.

kontinuierlich wirkenden viskosen Scherspannungen wird die ungeordnete Bewegungskomponente der Teilchen mit der Zeit anwachsen und das System so aufheizen.

#### 4.1.4. Energiegleichgewicht

Die Scheibendynamik wird durch das relative Größenverhältnis zwischen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  pro Umlauf (Keplergeschwindigkeit) und Kollisionsfrequenz  $\omega_c$  pro Teilchen bestimmt ([6], [17]). Ist  $\tau$  groß, dann ist  $\omega_c \gg \Omega$  und die Scheibe entspricht einem viskosen Fluid mit der kinematischen Viskosität  $\nu \approx v_T^2/\omega_c$ , worin  $v_T$  die Geschwindigkeitsdispersion ist. Ist  $\omega_c \lesssim \Omega$ , dann beschreiben die Teilchen längere und damit gekrümmte Bahnen zwischen den Stößen, womit die kinematische Viskosität nicht mehr als isotrop angesehen werden kann. Für beliebige Verhältnisse  $\Omega/\omega_c$  ist der Wert der kinematischen Viskosität von der Größenordnung

$$\nu \approx \frac{v_T^2}{\omega_c} \frac{1}{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_c^2}}. \quad (4.8)$$

Die Teilchen oszillieren durch die Äquatorialebene der Scheibe mit einer Frequenz von  $\Omega$ . Die mittlere Zahl an Stößen, die ein Teilchen beim Durchgang durch die Scheibe erfährt, ist von der Größenordnung der optischen Tiefe  $\tau$ . Deshalb ist  $\omega_c \approx \Omega\tau$  und Gl. (4.8) geht damit über in

$$\nu \approx \frac{v_T^2}{\Omega} \frac{1}{\tau + \frac{1}{\tau}}. \quad (4.9)$$

Diese Form der kinematischen Viskosität ist in [6] bewiesen. Mit dem allgemeinen Zusammenhang (welcher auch für hohe  $\tau$  gültig ist) zwischen kinematischer

Viskosität und mittlerer freier Weglänge,  $\nu \approx v_T \lambda$ , folgt dann eine für beliebige optische Tiefen gültige Form für die mittlere freie Weglänge

$$\lambda = \frac{v_T}{\Omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} , \quad (4.10)$$

womit eine  $\tau$ -Abhängigkeit der Heizrate aus Gl. (4.7) auftritt. Da  $\tau$  praktisch mittels der Teilchenerzeugung vorgegeben ist und sich nur begrenzt einstellen lässt, und da  $\epsilon$  der vorzugebende Parameter ist, muss es einen Schwellwert  $\epsilon_{\text{crit}}$  für die Restitution geben, bei dessen Überschreitung es zu einer Aufheizung bzw. bei dessen Unterschreitung es zu einer Abkühlung des Systems kommt. Da  $\lambda \sim 1/n$  und  $\omega_c \sim n$  ist, wird bei einem sich aufweitenden Ring ( $n$  wird kleiner) die Heizrate größer, gemäß Gl. (4.7), und die Kühlrate kleiner, gemäß Gl. (4.4). Dies bedeutet für eine abnehmende Dichte stets eine Zunahme der Temperatur im Ring. Bei stabilen Ringen, in denen durchaus eine Dichtezunahme erfolgen kann, wird der umgekehrte Fall eintreten und der Ring sich abkühlen müssen. Wird nun ein  $\epsilon_{\text{crit}}$  für eine Simulation vorgegeben, dann müssen sich Heiz- und Kühlrate exakt im Gleichgewicht befinden und die Geschwindigkeitsdispersion bzw. Temperatur des Systems sollte zeitlich konstant bleiben. Zur analytischen Berechnung des Schwellwertes müssen Gl. (4.4) und Gl. (4.7) mit Gl. (4.10) gleichgesetzt werden, woraus dann eine  $\epsilon$ - $\tau$ -Relation folgt

$$(1 - \epsilon_{\text{crit}}^2) (1 + \tau^2) = b , \quad (4.11)$$

wobei nach [17]  $b \approx 0.61$  ist. Bei der allen Simulationen mit  $N = 9108$  Teilchen zu Grunde liegenden Anfangskonfiguration wurde für die Ringmitte bei  $r = 0.151 R_\odot$  eine optische Tiefe von  $\tau \approx 0.3$  (s. Abb. 3.3 zu Beginn der Simulationen) ermittelt. Aus der Gleichgewichtsbedingung (4.11) folgt damit ein Schwellwert  $\epsilon_{\text{crit}} \approx 0.66$ . Mit diesem Wert für den Restitutionskoeffizienten liefert die Simulation ein sehr nahe am Energiegleichgewicht befindliches Verhalten der Geschwindigkeitsdispersion. Diese Simulation und andere (mit unterschiedlichen  $\epsilon$ ) zeigt Abb. 4.1.

Die Abbildung zeigt fünf Simulationen mit unterschiedlich starker Dissipation. Die Systeme mit  $\epsilon = 1.00$  und  $\epsilon = 0.78$  heizen sich über die gesamte Zeit auf (bei einem Stoß wird zu wenig kinetische Energie dissipiert), während jene mit  $\epsilon = 0.42$  und  $\epsilon = 0.29$  bis zu einem Gleichgewichtszustand abkühlen, da die Stoßdissipation die viskose Heizung überwiegt, solange das System sich verdichtet, Gl. (4.7).

Für das System mit  $\epsilon_{\text{crit}} = 0.66$  erkennt man allerdings eine nicht ganz exakt horizontal verlaufende, sondern eine leicht ansteigende Kurve. Das liegt daran, dass  $\tau$  zwar exakt aus der Anfangskonfiguration bestimmt, jedoch nicht weiter berücksichtigt wurde, dass sich der Ring anfänglich noch nicht im relaxierten Zustand befunden hat. Ein sich zu Beginn der Simulation nicht im Gleichgewicht befindlicher Ring verändert seine radiale und vertikale Form und erzwingt damit

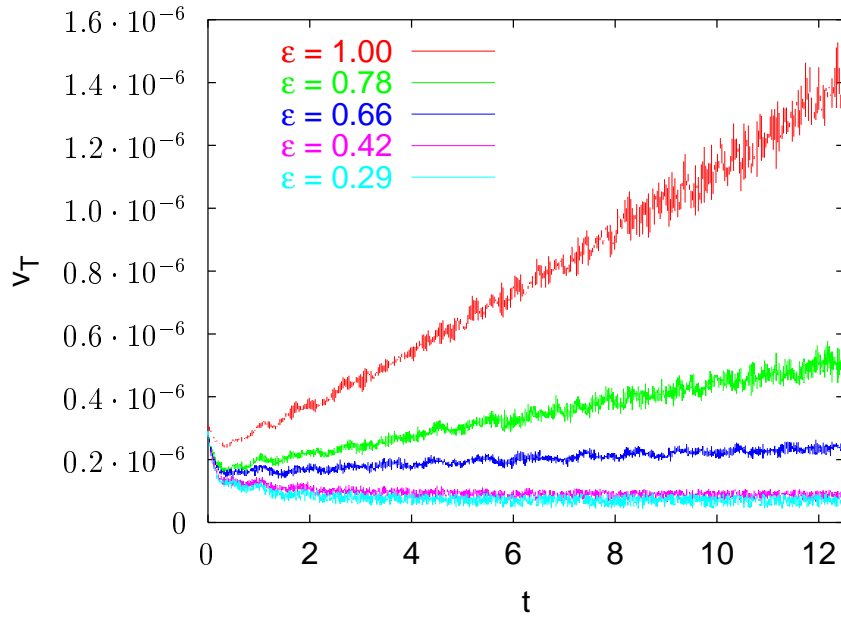


Abbildung 4.1.: Gesamte Geschwindigkeitsdispersion  $v_T$  [ $R_\odot/s$ ] über die Zeit [ $T_{\text{Kep}}$ ] aufgetragen für fünf verschiedene Restitutionskoeffizienten. Für  $\tau = 0.3$  wurde aus Gl. (4.11)  $\epsilon_{\text{crit}} = 0.66$  bestimmt (mittlere Kurve). Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

eine zeitlich veränderliche optische Tiefe. Im Allgemeinen nimmt  $\tau$  mit der Zeit ab, da der Ring weniger dicht wird. Aber genau ein zeitlich konstantes  $\tau$  wurde bei der Herleitung von Gl. (4.11) stillschweigend angenommen. Dies ist der Grund, warum mit  $\epsilon_{\text{crit}} = 0.66$  nicht der exakte Schwellwert getroffen wurde.

Wenn nun die optische Tiefe eines relaxierten Ringes zur Bestimmung des Schwellwertes von  $\epsilon_{\text{crit}}$  genommen werden muss, diese Simulationen aber ein zeitlich abnehmendes  $\tau$  zeigen, so heißt das, dass der zu späteren Zeitpunkten (etwa nach  $t = 4 T_{\text{Kep}}$ ) erst eingenommene relaxierte Zustand eine optische Tiefe mit  $\tau < 0.3$  haben muss. Damit folgt dann natürlich auch ein Schwellwert für den Restitutionskoeffizienten von  $\epsilon_{\text{crit}} < 0.66$ . Aus Gl. (4.11) folgt z.B. für  $\epsilon_{\text{crit}} \approx 0.624$  eine optische Tiefe mit  $\tau \approx 0$ . Damit liegt der wahre Schwellwert zwischen 0.624 und 0.66.

Aber wie Abb. 4.1 zeigt, hängt die Bestimmung des Schwellwertes empfindlich von der Vorgabe der optischen Tiefe ab: wenn man bei den Simulationen erst ab  $t \approx 4 T_{\text{Kep}}$  von einem relaxierten Zustand sprechen kann (d.h.  $\tau$  bleibt weitestgehend konstant), dann nimmt  $v_T$  bis  $t = 12 T_{\text{Kep}}$  immerhin noch etwa um 15 bis 20 % zu. Eine größere Sicherheit der bisher gebrachten Argumente hinsichtlich des Schwellwertes  $\epsilon_{\text{crit}} = 0.66$  kann eigentlich nur dann bestehen, wenn man Langzeitsimulationen untersucht ( $\approx 100 T_{\text{Kep}}$ ).

## 4.2. Die Temperaturkomponenten aus der Simulation

Zur Bestimmung der einzelnen Geschwindigkeitsdispersionskomponenten  $v_{T,r}$ ,  $v_{T,\phi}$  und  $v_{T,z}$  wird das ringförmige Simulationsvolumen, in dem sich das System befindet, in Teilringe der radialen Breite  $\Delta r$ , wie in Anhang E genauer beschrieben, aufgeteilt und die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten aller im Teilring vorhandenen Teilchen und deren Quadrate addiert und dann durch die Teilchenzahl geteilt (Näheres zur Auswertungsmethode ist im Anhang E nachzulesen). Damit hat man für einen Zeitpunkt die Größen  $\langle v_\alpha \rangle$  und  $\langle v_\alpha^2 \rangle$  gewonnen und kann daraus die gewünschte Standardabweichung bzw. Geschwindigkeitsdispersion gemäß Gl. (4.2) aller Teilchen zu diesem Zeitpunkt in einem bestimmten Teilring bestimmen.

Über die gesamte Simulationszeit betrachtet, ergibt sich aus den Simulationen für die einzelnen Geschwindigkeitsdispersionskomponenten  $v_{T,\phi} < v_{T,z} < v_{T,r}$ , wobei sich für höher eingestellte Energiedissipationen  $v_{T,z}$  immer mehr an  $v_{T,\phi}$  angleicht. Zudem bleibt für die gesamte Simulationszeit  $v_{T,r}$  um einen Faktor 2 größer als  $v_{T,\phi}$ . Diese Beobachtungen sollen die auf den nächsten Seiten folgenden drei Figurenpaare für unterschiedlich stark dissipative Systeme mit  $\epsilon = 0.42, 0.66, 1.00$  verdeutlichen, wobei jeweils die erste Figur (Abbn. 4.2, 4.4, 4.6) die Geschwindigkeitsdispersionen im Vergleich und die zweite (Abbn. 4.3, 4.5, 4.7) jeweils den Quotienten aus der  $r$ - und  $\phi$ -Komponente zeigt, der – wie die mit eingezeichnete und an die Ergebnisse angepasste Modellfunktion  $f(x) = \text{const.}$  verdeutlicht – für alle Zeiten (bis auf Zeiten zu Beginn der Simulationen) in etwa bei 2 liegt.

Die Erklärung dieses zeitlich konstant bleibenden Faktors liefern die im System auftretenden, unterschiedlichen Keplerellipsen, die durch die Pseudoteilchen beschrieben werden. Bewegt sich ein Teilchen auf einer ellipsenförmigen Bahn um die Zentralmasse, so wird es im zeitlichen Mittel eine mittlere Abweichung seiner Geschwindigkeitskomponenten von einem mittleren Geschwindigkeitswert erfahren, welche zwangsläufig für die  $r$ - und für die  $\phi$ -Komponente unterschiedlich groß sein müssen, da sich auch die zugeordneten Geschwindigkeiten zu einem bestimmten Zeitpunkt unterscheiden. Näheres dazu ist im Abschnitt 4.3 nachzulesen.

## 4.3. Rechnerische Bestimmung der Temperaturkomponenten

Betrachtet man das System zu einem bestimmten Zeitpunkt, dann hat man Kenntnis über Ort und Geschwindigkeit aller Teilchen für jeden Freiheitsgrad,

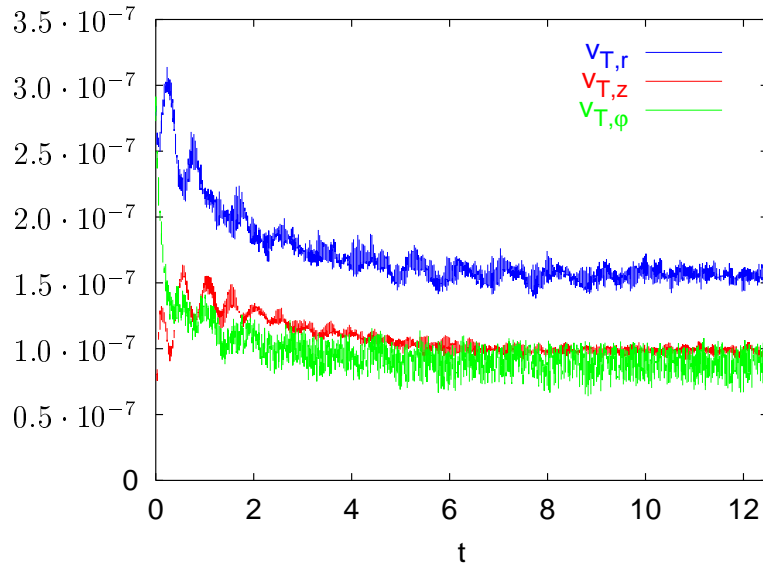


Abbildung 4.2.: Radiale, azimutale und axiale Geschwindigkeitsdispersionen  $[R_{\odot}/s]$  über die Zeit  $t [T_{\text{Kep}}]$  für einen Restitutionskoeffizienten von  $\epsilon = 0.42$  am Ort  $r = 0.151 R_{\odot}$  aufgetragen. Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

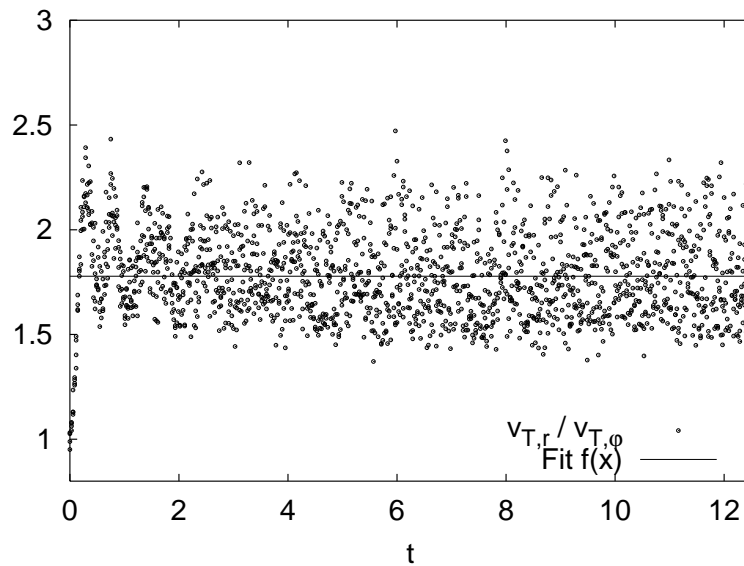


Abbildung 4.3.: Quotient aus  $v_{T,r}$  und  $v_{T,\phi}$  und Fitfunktion (Fit ab  $t = 2 T_{\text{Kep}}$ ) für die Simulation mit  $\epsilon = 0.42$  über die Zeit  $t [T_{\text{Kep}}]$  aufgetragen. Es ist  $f(x) = 1.78$ .

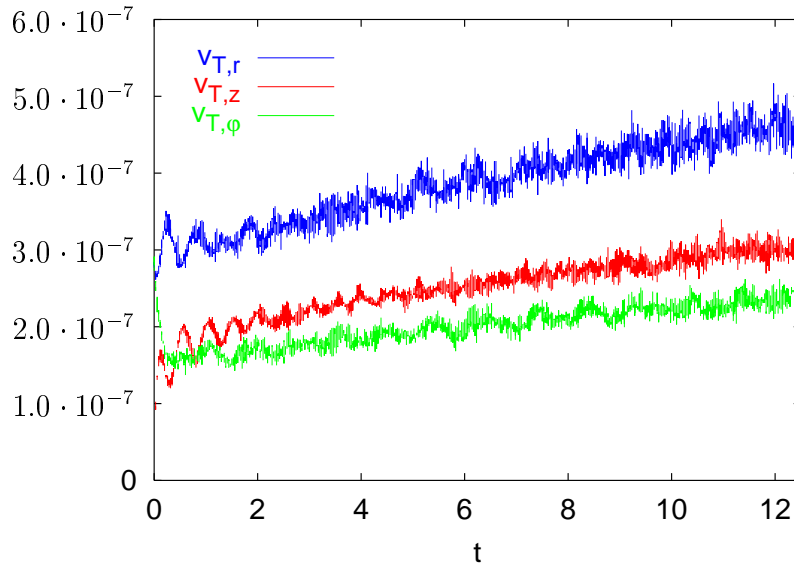


Abbildung 4.4.: Radiale, azimutale und axiale Geschwindigkeitsdispersionen [ $R_{\odot}/s$ ] über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ] für einen Restitutionskoeffizienten von  $\epsilon = 0.66$  am Ort  $r = 0.151 R_{\odot}$  aufgetragen. Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

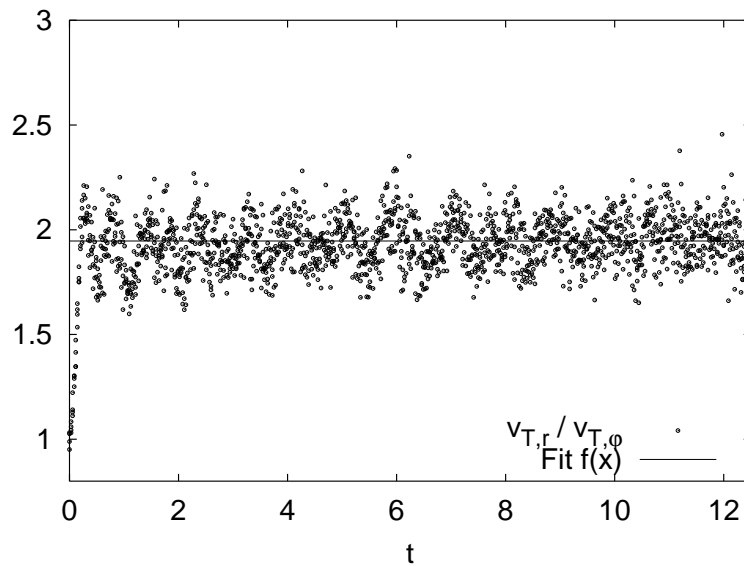


Abbildung 4.5.: Quotient aus  $v_{T,r}$  und  $v_{T,\phi}$  und Fitfunktion (Fit ab  $t = 2 T_{\text{Kep}}$ ) für die Simulation mit  $\epsilon = 0.66$  über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ] aufgetragen. Es ist  $f(x) = 1.95$ .

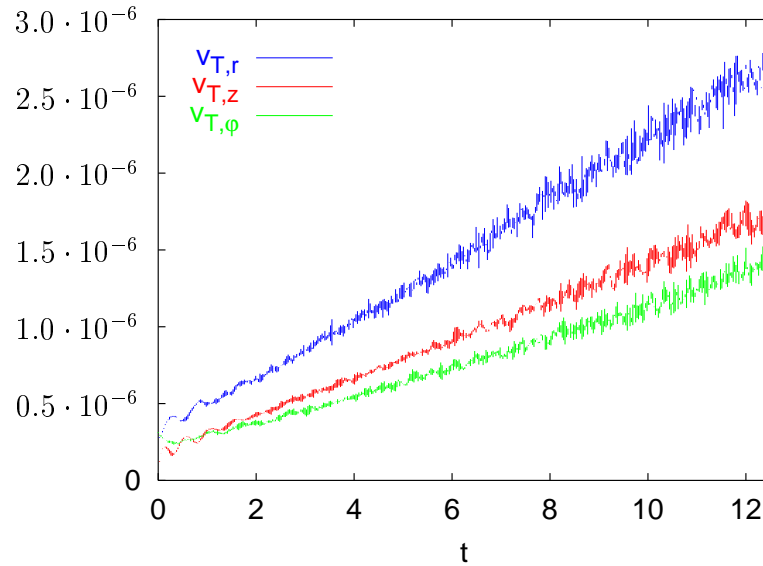


Abbildung 4.6.: Radiale, azimutale und axiale Geschwindigkeitsdispersionen  $[R_{\odot}/s]$  über die Zeit  $t [T_{Kep}]$  für einen Restitutionskoeffizienten von  $\epsilon = 1.00$  am Ort  $r = 0.151 R_{\odot}$  aufgetragen. Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

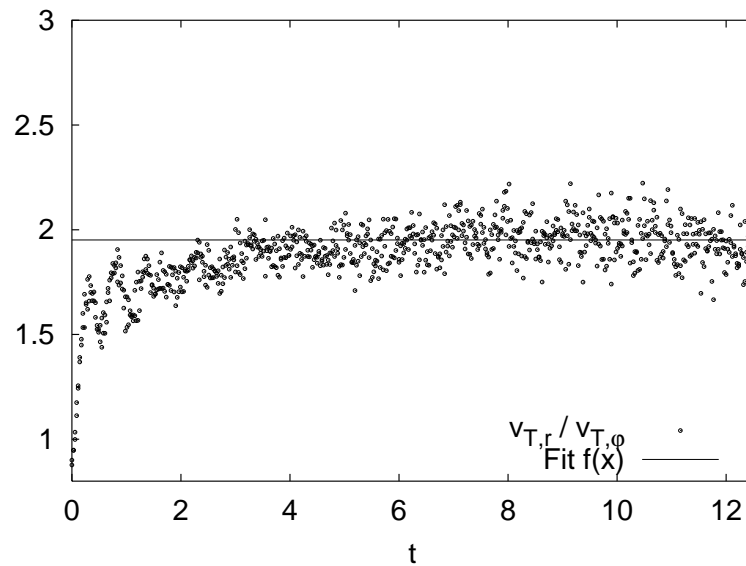


Abbildung 4.7.: Quotient aus  $v_{T,r}$  und  $v_{T,\phi}$  und Fitfunktion (Fit ab  $t = 5 T_{Kep}$ ) für die Simulation mit  $\epsilon = 1.00$  über die Zeit  $t [T_{Kep}]$  aufgetragen. Es ist  $f(x) = 1.95$ .



was im  $6N$ -dimensionalen Phasenraum einen Phasenraumpunkt  $\mathbf{x}$  ergibt. Betrachtet man das System zu verschiedenen Zeitpunkten, so ergeben sich entsprechend viele Phasenraumpunkte, die sich innerhalb eines bestimmten Volumens im Phasenraum befinden. Mit der Kenntnis dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\rho(\mathbf{x})$  der Punkte im Phasenraum kann man dann den *Ensemble-Mittelwert* einer Observablen  $\phi(\mathbf{x})$  definieren als

$$\langle \phi \rangle = \int \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^{6N} x . \quad (4.12)$$

Betrachtet man nun eine Geschwindigkeitskomponente  $v_\alpha$  als Observable, so ist  $\langle v_\alpha \rangle = \int \rho(\mathbf{x}) v_\alpha(\mathbf{x}) d^{6N} x$  der Ensemble-Mittelwert der Geschwindigkeit, welches das sogenannte *erste Moment* der Geschwindigkeitsverteilung darstellt.  $\langle v_\alpha^2 \rangle = \int \rho(\mathbf{x}) v_\alpha^2(\mathbf{x}) d^{6N} x$  wird dann als *zweites Moment* definiert, und der Ausdruck

$$V = \langle v_\alpha^2 \rangle - \langle v_\alpha \rangle^2 \quad (4.13)$$

als *Varianz* bezeichnet. Die Quadratwurzel aus der Varianz entspricht der mittleren Abweichung der  $v_\alpha$  vom Mittelwert  $\langle v_\alpha \rangle$ , wird als *Standardabweichung* bezeichnet und ist von außerordentlicher Wichtigkeit, wie im Folgenden noch zu sehen sein wird.

Im Folgenden wird versucht, den auftretenden Faktor 2 auf analytischem Wege zu erklären. Dazu wird eine andere Art von Mittelung, nämlich die *Zeitmitteilung*, verwendet, bei der man über diskrete Zeitschritte  $\Delta t$  geht und damit auch den Ort  $\mathbf{x}(t + i\Delta t)$  des Teilchens sprunghaft ändert. Ein mittlerer Wert für eine Geschwindigkeitskomponente über ein systemtypisches Zeitintervall (z.B. eine Keplerperiode  $T_{\text{Kep}}$ ) wäre dann durch

$$\langle v_\alpha \rangle = \frac{1}{T_{\text{Kep}}} \int_{t_0}^{t_0 + T_{\text{Kep}}} v_\alpha(\mathbf{x}(t)) dt \quad (4.14)$$

gegeben, wobei  $t_0$  einen bestimmten Zeitpunkt während des Umlaufs darstellt. Um die Standardabweichung zu bekommen, muss noch das zweite Moment gebildet werden, also

$$\langle v_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{T_{\text{Kep}}} \int_{t_0}^{t_0 + T_{\text{Kep}}} v_\alpha^2(\mathbf{x}(t)) dt , \quad (4.15)$$

und es folgt für die Standardabweichung der Ausdruck

$$v_{T,\alpha} = \sqrt{\langle v_\alpha^2 \rangle - \langle v_\alpha \rangle^2} . \quad (4.16)$$

$v_{T,\alpha}$  ist mit  $\alpha \in \{r, \phi, z\}$  die Geschwindigkeitskomponente, der eine Temperatur zugeordnet werden kann.

In Tab. 4.2 sind für ein Teilchen die Geschwindigkeitsdispersionen für die  $r$ - und

$\epsilon_{\text{ecc}}$	$v_{\text{T,r}} [10^{-6} \text{ R}_{\odot}/\text{s}]$	$v_{\text{T},\phi} [10^{-6} \text{ R}_{\odot}/\text{s}]$	$v_{\text{T,r}}/v_{\text{T},\phi}$	$a/b$
0.10	0.193	0.096	2.0000	1.0050
0.20	0.777	0.388	2.0001	1.0206
0.30	1.771	0.885	2.0004	1.0483
0.40	3.210	1.604	2.0013	1.0911
0.50	5.151	2.571	2.0036	1.1547
0.60	7.690	3.828	2.0086	1.2500
0.70	10.100	5.440	2.0195	1.4003
0.80	15.380	7.520	2.0451	1.6667
0.90	21.639	10.230	2.1201	2.2940
0.99	33.024	12.182	2.7108	7.0888

Tabelle 4.2.: Analytische Berechnung der Standardabweichungen und des Quotienten aus ihnen für verschiedene numerische Exzentrizitäten  $\epsilon_{\text{ecc}}$  für ein Teilchen mit  $a = 0.3 \text{ R}_{\odot}$  als die große und  $b$  als die kleine Halbachse der Bahn.

$\phi$ -Koordinate und ihr Quotient berechnet und in Abb. 4.8 veranschaulicht, wobei die numerische Exzentrizität  $\epsilon_{\text{ecc}}$  als zu variierender Parameter verwendet wird. Die durch die Ergebnisse (s. Abschnitt 4.2) offenbarte Diskrepanz zwischen den

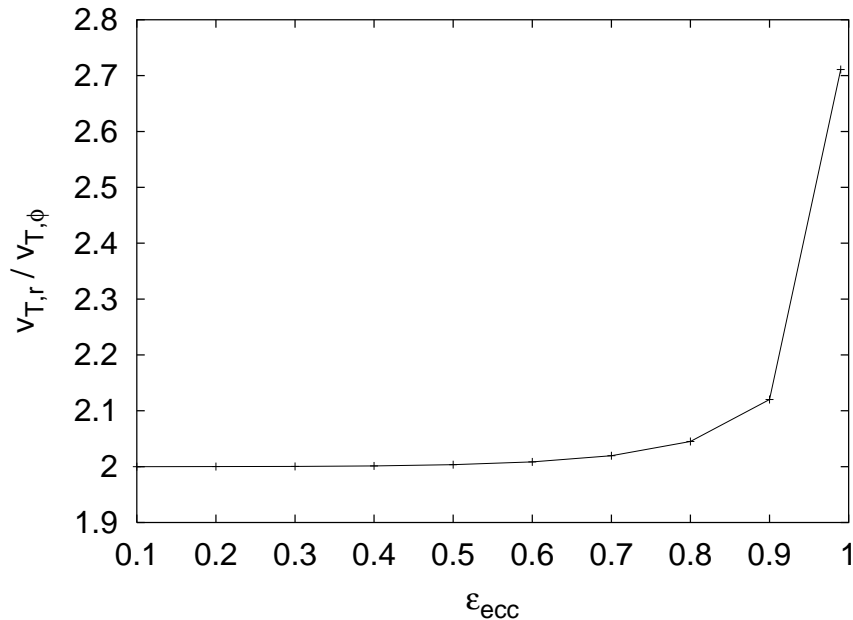


Abbildung 4.8.: Grafische Verdeutlichung der Tabelle 4.2. Aufgetragen ist hier der Quotient  $v_{\text{T,r}}/v_{\text{T},\phi}$  über die numerische Exzentrizität  $\epsilon_{\text{ecc}}$ .

Standardabweichungen der  $r$ - und  $\phi$ -Geschwindigkeitskomponente ist durch die auftretenden Bahnexzentrizitäten der Teilchen zu erklären. Z.B. ist die Standardabweichung für ein Teilchen, das auf einem kreisförmigen Orbit um die Zentralmasse läuft, sowohl für die  $r$ - als auch für die  $\phi$ -Geschwindigkeitskomponente Null, da ja während einer Keplerperiode gemäß des zweiten *Kepler'schen* Gesetzes die durch den Fahrstrahl zwischen Teilchen und Zentralmasse pro Zeiteinheit überstrichene Fläche gleich bleiben muss und daraus für kreisförmige Bahnen stets eine konstante Tangentialgeschwindigkeit folgt. Demgegenüber haben Teilchen auf ellipsenförmigen Bahnen zu unterschiedlichen Zeitpunkten unterschiedliche Geschwindigkeitskomponenten (z.B. ist die Geschwindigkeit im *Perizentrum* der Bahn maximal und im *Apozentrum* minimal), weshalb dann die Einführung einer Standardabweichung für die Temperaturen von Bedeutung ist.

Wie aus Abb. 4.8 ersichtlich, liegt für unterschiedlich auftretende aber hinreichend kleine numerische Exzentrizitäten  $\epsilon_{\text{ecc}}$  der Quotient der Geschwindigkeitsdispersionen bei 2. Die Abweichung von diesem Faktor wird für zunehmende numerische Exzentrizitäten größer, d.h. es nimmt  $v_{T,r}$  stärker zu als  $v_{T,\phi}$ . Da die Simulationen im Allgemeinen einen konstanten Faktor 2 offenbaren, kann man daraus schließen, dass die wenigsten Teilchen im System auf stark ausgeprägten Ellipsen um die Zentralmasse laufen, da solche Bahnen im Quotienten  $v_{T,r}/v_{T,\phi}$  die größten Abweichungen von dem Faktor 2 bedingen. D.h. auf Grund des in Abb. 4.8 offenbarten Faktors 2 beschreiben die meisten Teilchen Bahnen, deren numerische Exzentrizitäten Werte bis maximal 0.6 annehmen.

## 4.4. Die ortsabhängigen Temperaturkomponenten

Während bisher die Geschwindigkeitsdispersionskomponenten über die Zeit für die Ringmitte bei etwa  $r = 0.151 R_{\odot}$  aufgezeigt wurden, sollen die folgenden Figuren ein Gefühl für die radiale Verteilung der Geschwindigkeitsdispersionskomponenten für bestimmte Entwicklungszeitpunkte geben. Verglichen wird der Ortsverlauf der Geschwindigkeitsdispersionskomponenten zu vier verschiedenen Zeitpunkten zweier verschieden stark dissipativer Systeme. Das erste System entwickelt sich auf Grund vollkommen elastischer Stöße ( $\epsilon = 1.00$ ), das zweite System besitze einen recht hohen Dissipationsanteil ( $\epsilon = 0.29$ ).

Bei dieser Darstellung der Geschwindigkeitsdispersionen ist man im Gegensatz zur zeitaufgelösten Darstellung des letzten Abschnitts für gewisse radiale Orte im Ring imstande, Abschätzungen über das Verhältnis zwischen Heiz- und Kühlrate zu machen. Da die dissipationfreie Simulation keinen Kühleffekt besitzt und nur Heizung durch differenzielle Rotation stattfindet, können durch die Form der Kurven Rückschlüsse auf das Heizverhalten des Systems gezogen werden.

Zum ersten fällt ein allgemeiner Trend bei mehr oder weniger dissipationfreien Simulationen derart auf (stellvertretend für solche seien die folgenden drei

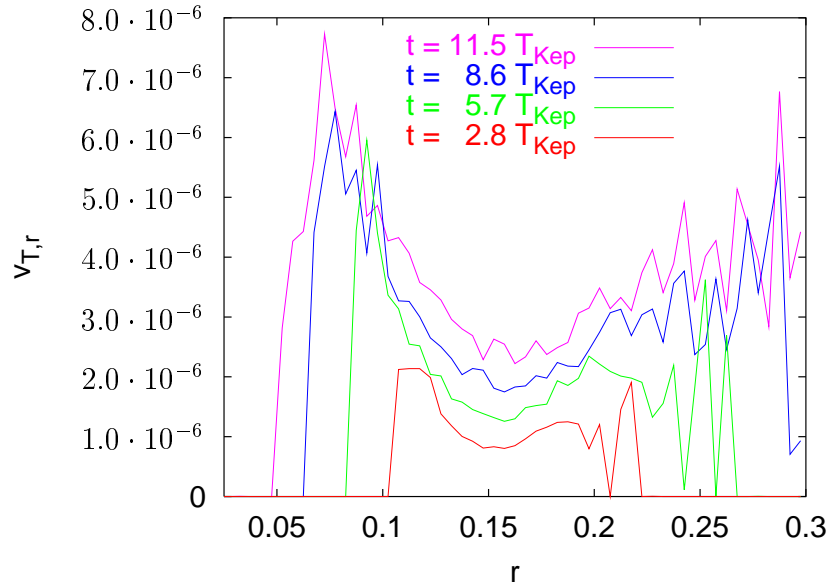


Abbildung 4.9.: Die  $r$ -Geschwindigkeitsdispersion [ $R_{\odot}/s$ ] über den Ort [ $R_{\odot}$ ] zu vier verschiedenen Zeitpunkten für  $\epsilon = 1.00$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

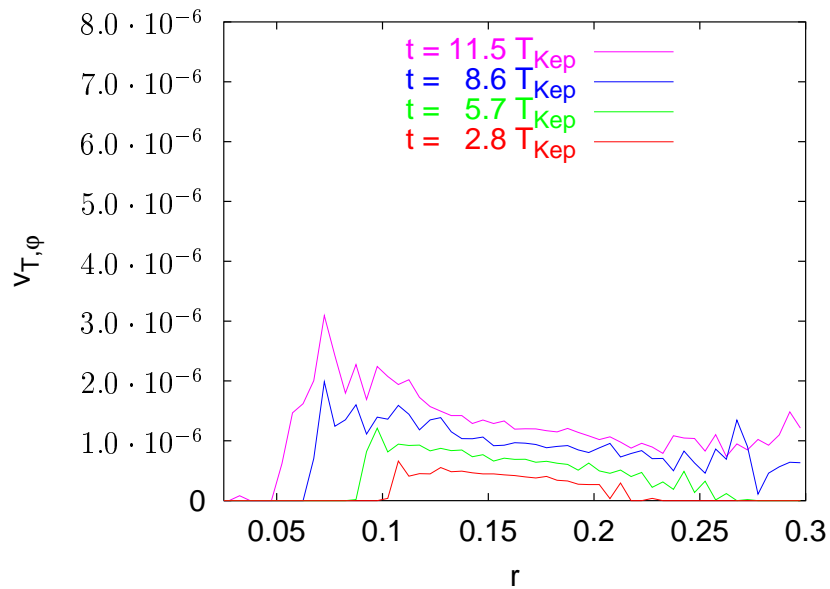


Abbildung 4.10.: Die  $\phi$ -Geschwindigkeitsdispersion [ $R_{\odot}/s$ ] über den Ort [ $R_{\odot}$ ] zu vier verschiedenen Zeitpunkten für  $\epsilon = 1.00$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

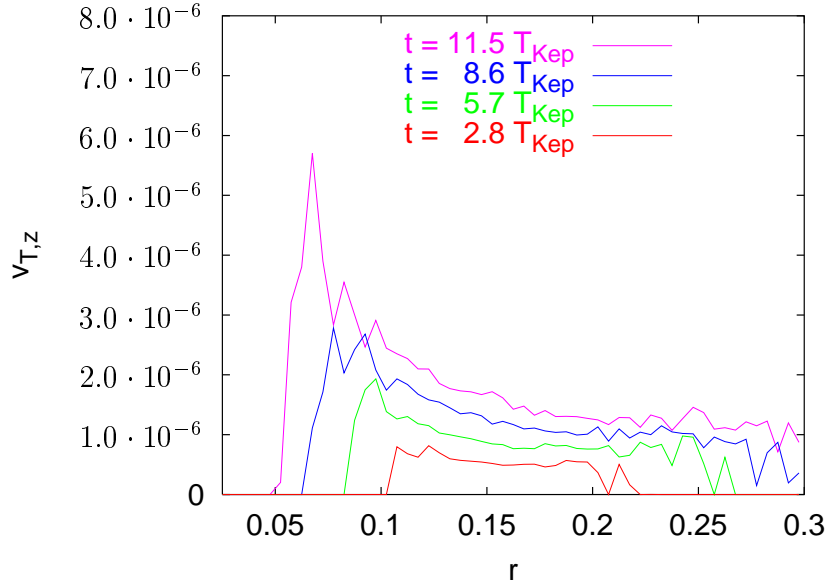


Abbildung 4.11.: Die  $z$ -Geschwindigkeitsdispersion [ $R_{\odot}/s$ ] über den Ort [ $R_{\odot}$ ] zu vier verschiedenen Zeitpunkten für  $\epsilon = 1.00$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

Figuren für  $\epsilon = 1.00$ ), dass die Geschwindigkeitsdispersionskomponenten mit zunehmendem Abstand  $r$  von der Zentralmasse, d.h. in Richtung äußere Ringbereiche, deutlich abfallen. Dies ist besonders bei der  $\phi$ - und  $z$ -Komponente (Abbn. 4.10, 4.11) zu erkennen. Bei der  $r$ -Geschwindigkeitsdispersionskomponente ist dieser Trend nur noch schwach zu erkennen, weil dort die Randeﬀekte, auf die gleich näher eingegangen wird, stärker ausgeprägt sind und die besagte Tendenz überdecken. Dieser für alle Zeitpunkte gültige abnehmende Trend ist dann also ausschließlich durch die Heizung zu erklären, denn in inneren Ringbereichen ist die Heizrate wesentlich größer als in äußeren, da, wie Tab. 4.1 zeigt,

$$\left. \frac{\partial v_{\phi}}{\partial r} \right|_{r_i} > \left. \frac{\partial v_{\phi}}{\partial r} \right|_{r_a}$$

gilt, wobei  $r_i$  einen kleinen und  $r_a$  einen großen radialen Ort bezeichnen. Außerdem ist hier für jeweils einen bestimmten Zeitpunkt wieder  $v_{T,r} > v_{T,z} > v_{T,\phi}$  zu erkennen, was für beliebige Orte  $r$  innerhalb des Ringes (d.h.  $0.1 R_{\odot} < r < 0.2 R_{\odot}$ , ohne Randbereiche) gültig ist.

Die folgenden Abbildungen beinhalten in derselben Reihenfolge die Geschwindigkeitsdispersionskomponenten, jedoch für tief inelastische Stöße zwischen den Teilchen ( $\epsilon = 0.29$ ). Bei solchen stark dissipativen Systemen werden die Heizeﬀekte durch die stark ausgeprägte Kühlung überdeckt und man kann z.B. den zu äußeren Ringbereichen abnehmenden Trend der Geschwindigkeitsdispersion

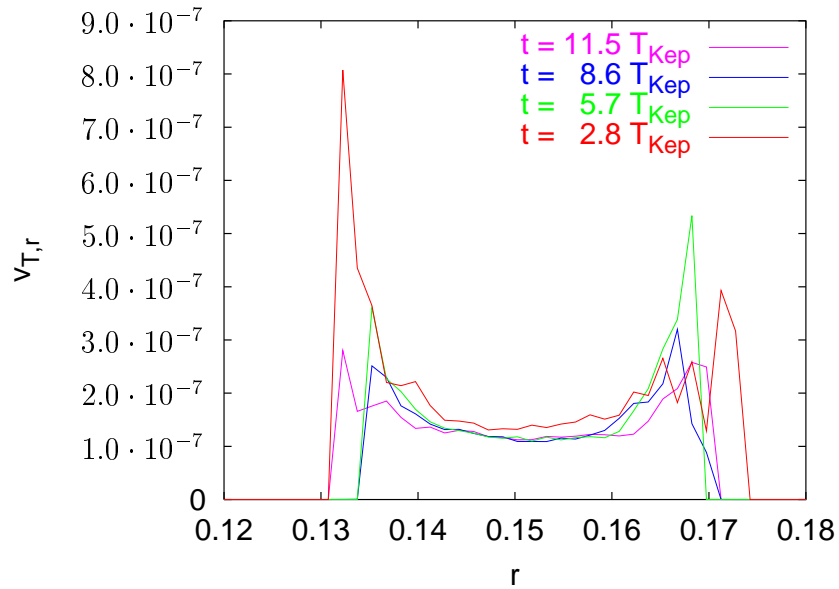


Abbildung 4.12.: Die  $r$ -Geschwindigkeitsdispersion [ $R_\odot/s$ ] über den Ort [ $R_\odot$ ] zu vier verschiedenen Zeitpunkten für  $\epsilon = 0.29$ .

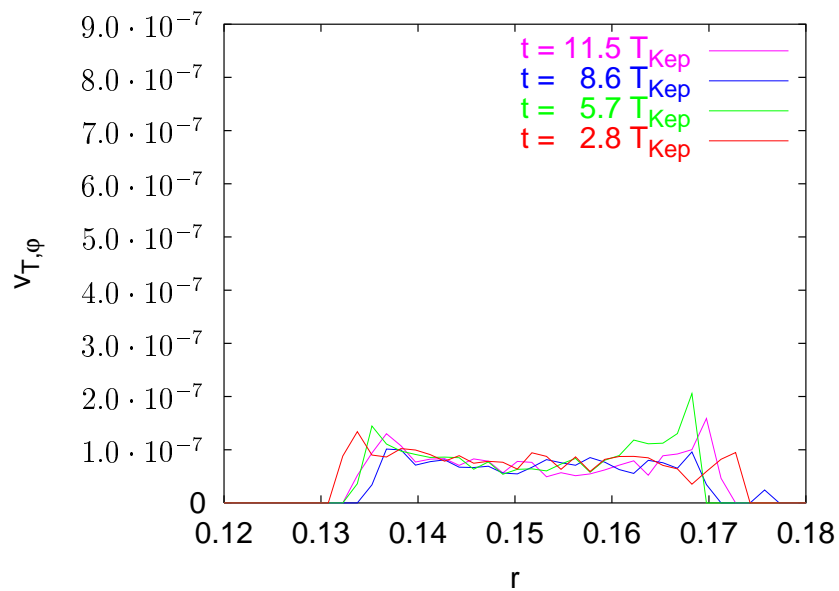


Abbildung 4.13.: Die  $\phi$ -Geschwindigkeitsdispersion [ $R_\odot/s$ ] über den Ort [ $R_\odot$ ] zu vier verschiedenen Zeitpunkten für  $\epsilon = 0.29$ .

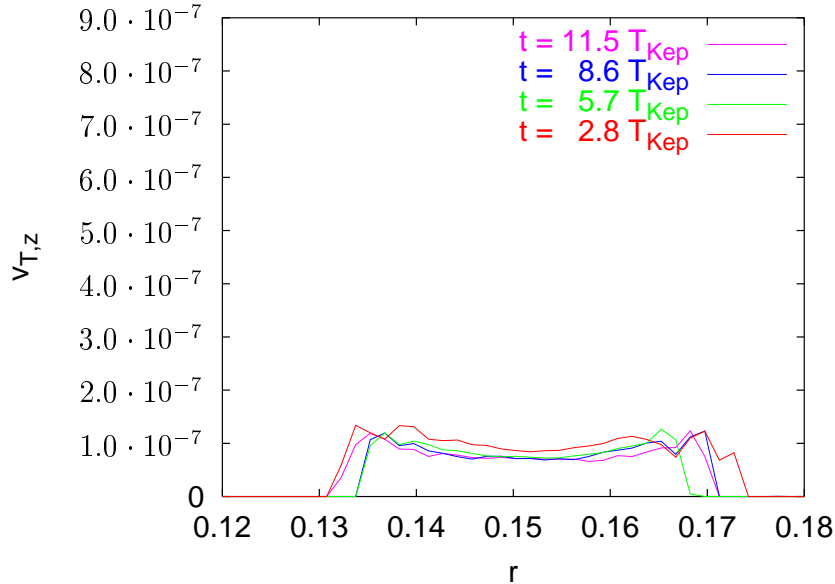


Abbildung 4.14.: Die  $z$ -Geschwindigkeitsdispersion [R<sub>⊙</sub>/s] über den Ort [R<sub>⊙</sub>] zu vier verschiedenen Zeitpunkten für  $\epsilon = 0.29$ .

nen nicht mehr erkennen (s. Abbn. 4.13, 4.14). Wie beim elastischen Fall sind auch hier wieder bei der  $r$ -Geschwindigkeitsdispersionskomponente die Randeffekte stärker ausgeprägt als bei den anderen Komponenten.

Es stellt sich nun die Frage, warum die Randeffekte bei diesen hier gezeigten und auch anderen untersuchten Simulationen so sehr ausgeprägt, d.h. warum an den Ringrändern (innen *und* außen) die Geschwindigkeitsdispersionen (vor allem gut bei der radialen Geschwindigkeitsdispersion zu erkennen) und damit auch die Temperaturen so hoch sind und weshalb diese Randeffekte auftreten. Zum Einen spielt hierbei die Statistik eine große Rolle, da bei der Auswertung die wenigen Teilchen, die sich in Teilringen der Ringrandgebiete befinden, die Bestimmung der Mittelungsgrößen (hier: Geschwindigkeitsdispersionskomponenten) verfälschen und damit mitunter hohe Geschwindigkeitsdispersionen bedingen. Aber es kann dies nicht der einzige Grund für die großen Werte am Ringrand sein, da beispielsweise bei stark dissipativen Simulationen diese beobachteten „Hörner“ in der Geschwindigkeitsdispersion nicht mehr so ausgeprägt sind. Zum Anderen können die Bahnformen der Teilchen in den Randgebieten einen Einfluss auf die dortigen Temperaturen nehmen, wenn sie vorwiegend stark ausgeprägten Ellipsen entsprechen. Denn dann haben dort die Trajektorien der Teilchen in der Zeit zwischen den Stößen hohe Exzentrizitäten im Gegensatz zu denen in Gebieten höherer optischer Tiefe, also in der Mitte des Ringes. Dass hohe Bahnexzentrizitäten zu höheren Geschwindigkeitsdispersionen führen, ist auch aus

Tab. 4.2 zu entnehmen. Dort nehmen die Geschwindigkeitsdispersionskomponenten  $v_{T,r}$  und  $v_{T,\phi}$  mit zunehmender numerischer Exzentrizität  $\epsilon_{ecc}$  zu, d.h. mit zunehmender Ellipsenform der Bahn.

Die Abbn. 4.15, 4.16, 4.17 und 4.18 zeigen die aus den momentanen Orten und Geschwindigkeiten aller im System befindlichen Teilchen analytisch berechneten numerischen Exzentrizitäten (der Übersichtlichkeit halber wurden hier die Werte von jedem fünften Teilchen eingezeichnet). Jeder Punkt besitzt als Ordinatenwert den Ort des zugehörigen Teilchens, während der Abszissenwert die numerische Exzentrizität der Bahn des Teilchens angibt. Man erkennt in den inneren und äußeren Ringbereichen stärkere Exzentrizitäten als in der Ringmitte. Um den örtlichen Verlauf von  $\epsilon_{ecc}$  besser sichtbar zu machen, wurde als Modellfunktion ein Polynom  $f(x)$  fünften Grades genommen und an die Daten angepasst. Wie in diesen Abbildungen deutlich zu erkennen, nimmt die Modellfunktion an den Ringrändern die größten Werte an. Man darf die „Hörner“ von  $f(x)$  an den äußersten Rändern nicht überbewerten, da dort nur wenige Daten (Teilchen) vorhanden sind, an die  $f(x)$  angepasst wird (schlechtere Statistik!). Nichtsdestotrotz ist in einem engen Intervall um die Ringmitte bei  $r = 0.151 R_{\odot}$  dieses Verhalten doch zu erkennen. Zu erklären ist diese Beobachtung nur durch die Annahme, dass Stöße im Allgemeinen die Bahnexzentrizitäten der Teilchen mit der Zeit zu kleineren Werten evolvieren lassen [19] und in Gebieten höherer optischer Tiefe (also der Ringmitte) auf Grund der auftretenden höheren Kollisionsfrequenz pro Teilchen zu einem gegebenen Zeitpunkt niedrigere Bahnexzentrizitäten zu finden sind als in Bereichen mit spärlicher Teilchenzahldichte (Ringränder). An den Rändern der Scheiben und Ringe haben die Teilchen wesentlich größere mittlere freie Weglängen, womit sie dann auf Bahnen mit durch den jüngsten Stoß verursachten Bahnexzentrizitäten länger verweilen können, bevor sie ein nächstes Mal stoßen. Während dieser Zeit erfahren die Teilchen in der Ringmitte sehr viel öfter Stöße und dadurch eine schnellere Abnahme ihrer Bahnexzentrizitäten. Damit ist das Wesen der „Hörner“ an den Ringrändern geklärt.

Zudem ist noch für den vollkommen elastischen Fall (Abbn. 4.15 und 4.16) ein allgemeiner Anstieg der Bahnexzentrizitäten mit der Zeit an allen Orten zu erkennen (zu bedenken ist, dass eine Zeitspanne von knapp 9 Keplerperioden zwischen beiden Figuren liegt), was dadurch zu begründen ist, dass der Ring sowohl radial wie auch vertikal zerfließt und dadurch die Anzahl der Kollisionen pro Zeiteinheit und Teilchen überall im Ring in gleichem Maße abnimmt. Im Gegensatz dazu gibt es diesen allgemeinen Anstieg von  $\epsilon_{ecc}$  für stark dissipative Systeme - wie es die Abbn. 4.17 und 4.18 präsentieren - nicht, da der Ring durch die starke Dissipation zusammen gehalten wird und dadurch die Kollisionsfrequenz für alle Orte kaum abnimmt.



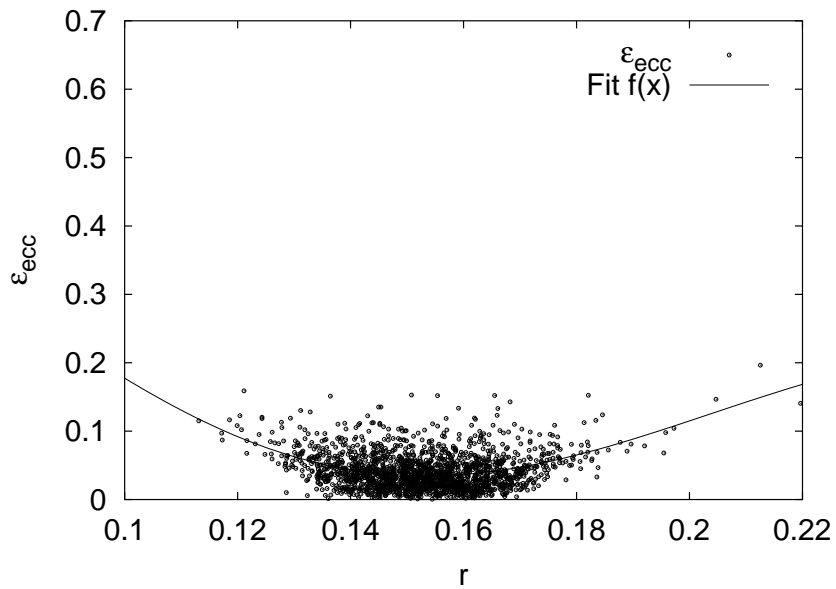


Abbildung 4.15.: Für jedes Teilchen berechnete numerische Exzentrizität  $\epsilon_{\text{ecc}}$  zum Zeitpunkt  $t = 2.8 T_{\text{Kep}}$  für  $\epsilon = 1.00$ .

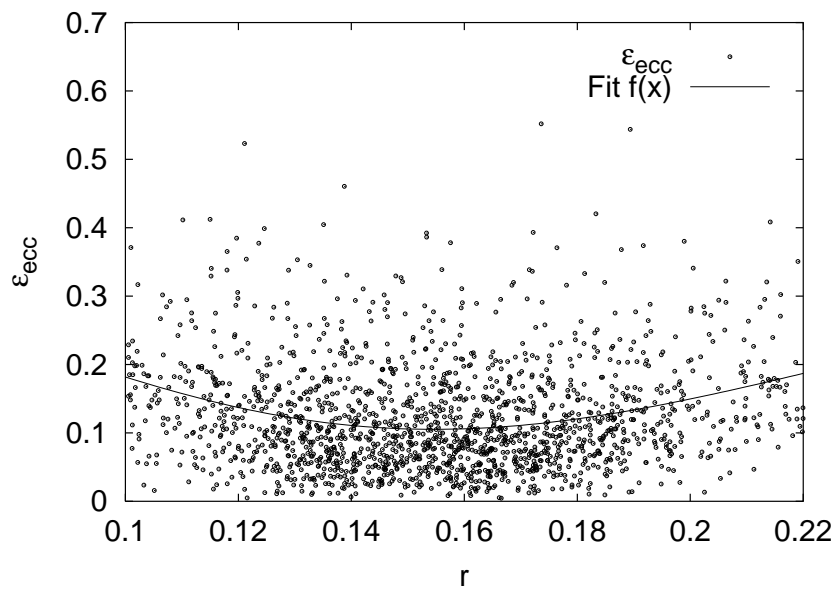


Abbildung 4.16.: Für jedes Teilchen berechnete numerische Exzentrizität  $\epsilon_{\text{ecc}}$  zum Zeitpunkt  $t = 11.5 T_{\text{Kep}}$  für  $\epsilon = 1.00$ .

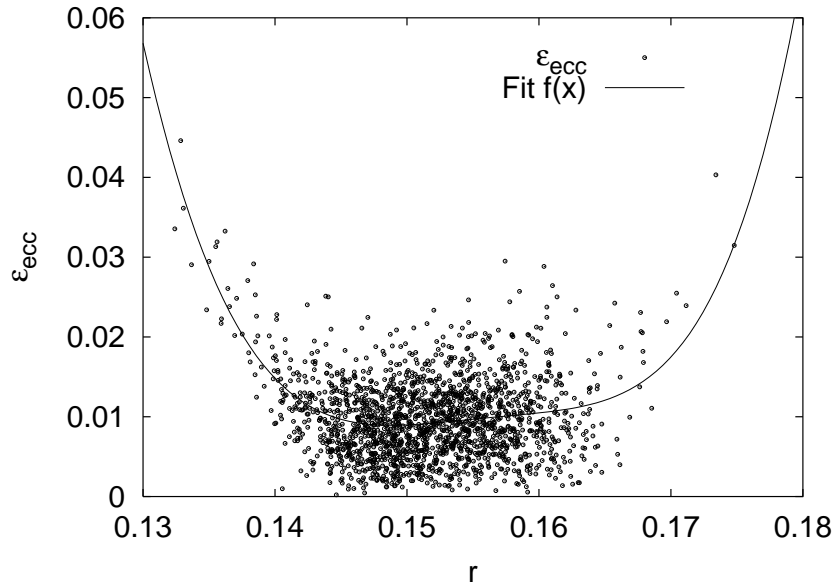


Abbildung 4.17.: Für jedes Teilchen berechnete numerische Exzentrizität  $\epsilon_{ecc}$  zum Zeitpunkt  $t = 2.8 T_{Kep}$  für  $\epsilon = 0.29$ .

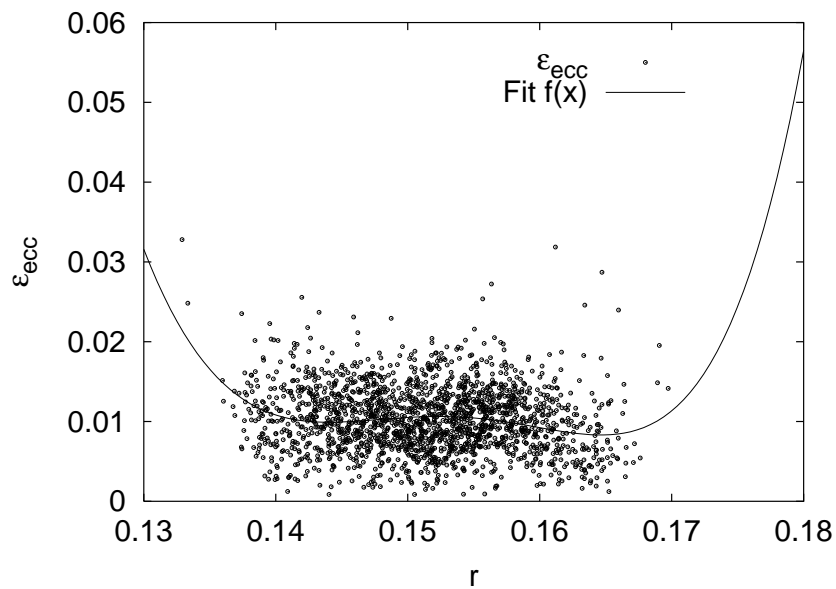


Abbildung 4.18.: Für jedes Teilchen berechnete numerische Exzentrizität  $\epsilon_{ecc}$  zum Zeitpunkt  $t = 11.5 T_{Kep}$  für  $\epsilon = 0.29$ .

## 5. Die Dynamik von Systemen ohne Dissipation

Die Abb. 2.1 z.B. zeigt eine Simulation mit einem normalen Restitutionskoeffizienten  $\epsilon = 1.00$ , welche deutlich ein starkes Aufweiten des Ringes sowohl in radiale als auch in vertikale Richtung offenbart. Parallel zur Rotationsachse betrachtet, erkennt man einen mit der Zeit radial zerfließenden Ring, d.h. es tritt ein radialer Massenfluss in Richtung Zentralmasse wie auch einer von ihr weg auf, so dass die effektive radiale Breite zeitlich zunimmt. Verfolgt man die Entwicklung der radialen Teilchenzahl pro Flächeneinheit in der Zeit zurück, so kann man annehmen, dass zu einem ursprünglichen Zeitpunkt die Verteilung mit einer Delta-Distribution zu vergleichen war. In der Praxis hat der Ring allerdings zu Beginn der Simulationen eine endliche, wenn auch eine sehr dünne Breite. Damit verbunden ist aber auch eine sehr hohe anfängliche optische Tiefe in der Ringmitte, z.B.  $\tau \approx 0.3$  bei der hierfür verwendeten und in Anhang D zu besprechenden Teilchengenerierung. Es wird sich noch zeigen, dass die auf Grund des im Ring auftretenden Geschwindigkeitsgradienten resultierenden Scherspannungen für die radiale (und vertikale) Aufweitung verantwortlich sind.

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Brücke zwischen der Simulation, die mikroskopische Züge besitzt, und der makroskopischen Theorie der Hydrodynamik, wie sie in Kap. 1 beschrieben wurde, zu schlagen und anhand einiger Beispiele die *Navier-Stokes*'schen Gleichungen zu überprüfen, nachdem sie an das Problem angepasst, d.h. in eine zweidimensionale Form gebracht wurden. Dies ist natürlich für flache Staubscheiben und planetarische Ringe, wie sie vielfach im Universum beobachtet werden und zur Zeit im Rahmen der extrasolaren Planetenforschung Gegenstand intensiver Forschung sind, erforderlich.

Die benötigten zwei-dimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen enthalten keinerlei Terme, die die Dissipation durch inelastische Stöße berücksichtigen, weshalb die Theorie zuerst für den dissipationsfreien Fall überprüft wird. Dazu wird nun  $\epsilon = 1$  gewählt.

## 5.1. Die Näherung für eine dünne Scheibe

Eine wesentliche Vereinfachung der mathematischen Behandlung dünner astrophysikalischer Gasscheiben und Ringe ist die Vernachlässigung der vertikalen gegenüber der radialen Ausdehnung des Objektes ([4], [14], [15], [16]). Eine in  $z$ -Richtung hinreichend flache Scheibe, für die diese Überlegungen gelten, muss also der Forderung

$$\langle H \rangle \ll r \quad (5.1)$$

genügen, wobei  $\langle H \rangle$  die *mittlere vertikale Höhe* und  $r$  die radiale Ausdehnung des Ringes sind. In Anlehnung an die Mittelungen des Anhanges E stellt  $\langle H \rangle$  gemäß E.1 die Wurzel aus der Mittelung der  $z$ -Ortskoordinatenquadrate der Teilchen pro Teilring dar, d.h.  $\langle H \rangle = \sqrt{\langle z^2 \rangle}$ . Die mittlere vertikale Skalenhöhe ist dann ein gutes Maß für die vertikale Ausdehnung des Ringes. In den dissipationsfreien Simulationen ist diese Bedingung vorwiegend für anfängliche Zeiten erfüllt, wie die beiden Figuren 5.1 und 5.2 zeigen. Als Abszisse ist die mittlere vertikale Skalenhöhe  $\langle H \rangle$  aufgetragen. Man muss zudem noch beachten, dass einzelne Teilchen  $z$ -Koordinaten haben, welche größer sind als  $\langle H \rangle$ , aber im Mittel beschreibt  $\langle H \rangle$  die mittlere vertikale Breite des Teilchenaggregats recht gut.

Wie die beiden Abbildungen zeigen, ist  $\langle H \rangle$  über die Simulationszeit in Einheiten einer Umlaufperiode (Keplerperiode  $T_{\text{Kep}}$ ) aufgetragen. In Abb. 5.1 ist für die Ringmitte die zeitliche Entwicklung der mittleren vertikalen Ausdehnung in Einheiten des doppelten Teilchenradius' ( $2R = 0.000786 R_{\odot}$ ), in Abb. 5.2 in Einheiten des Sonnenradius' ( $R_{\odot}$ ) aufgetragen. Die Dynamik eines Ringes mit  $\epsilon = 1$  entspricht einem sich permanenten Aufblähen sowohl in vertikale als auch in radiale Richtung. Die Simulationen zeigen, dass  $\langle H \rangle$  zu Beginn (bis etwa  $t = 1 T_{\text{Kep}}$ ) stark anwächst, dann allerdings eine Verzögerung in der zeitlichen Ausdehnung erfährt. Die Oszillation von  $\langle H \rangle$  über die Zeit ist auf die Teilchengenerierung (Anhang D) zurückzuführen, welche keinen Gleichgewichtszustand des Ringes darstellt. Letztendlich dehnt er sich aber permanent vertikal aus, wobei aber in der betrachteten Simulationszeit von  $14 T_{\text{Kep}}$  obige Gl. (5.1) erfüllt bleibt. Dies bestätigt Abb. 5.2, worin im ungünstigsten Falle (d.h. nach der längsten in der Figur eingetragenen Simulationszeit von  $t = 11.5 T_{\text{Kep}}$ )  $r \approx 15 \langle H \rangle$  gilt. Nach anfänglicher rapider Ausdehnung geht in Abb. 5.1  $\langle H \rangle$  während seines Zuwachses in eine gedämpfte Oszillation über. Die Oszillation hat eine Periode von ca.  $\frac{1}{2} T_{\text{Kep}}$ , nach der sich die  $\langle v_z \rangle$ -Komponente aller Teilchen in einem Teilring in ihrem Vorzeichen umkehrt.

Der weitere Verlauf der Ausdehnung ohne oszillierende Substruktur (ab etwa  $t = 2 T_{\text{Kep}}$ ) verbleibt dann gleichförmig: die mittlere vertikale Skalenhöhe nimmt dann linear mit der Zeit zu. Irgendwann ist  $\langle H \rangle$  so stark angewachsen, dass die Forderung für eine dünne Scheibe verletzt wird und es physikalisch nicht mehr sinnvoll ist, die NSG in zwei Dimensionen nieder zu schreiben. D.h. man muss

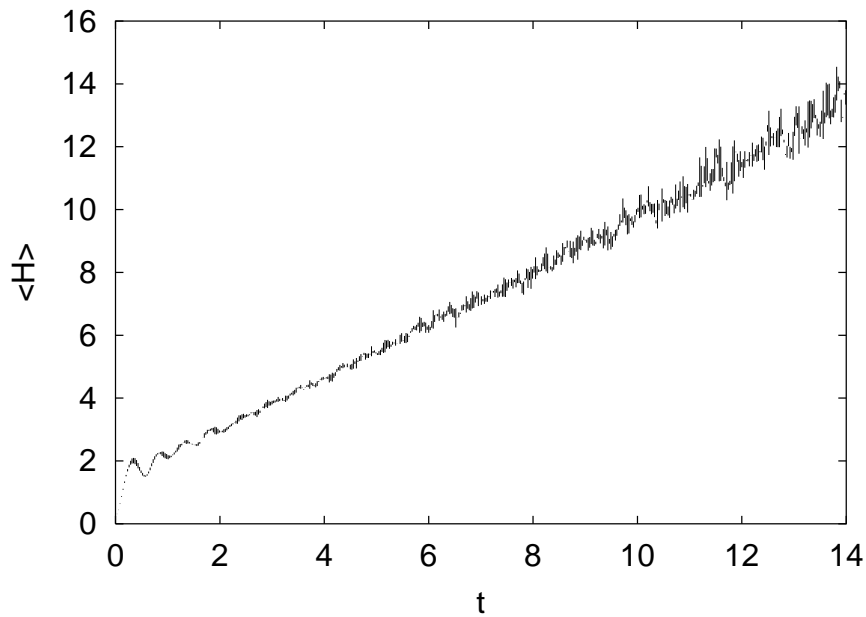


Abbildung 5.1.: Die mittlere vertikale Ausdehnung des Ringes  $\langle H \rangle$  [ $2R$ ] in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ] für die Ringmitte  $r \approx 0.151 R_{\odot}$ .

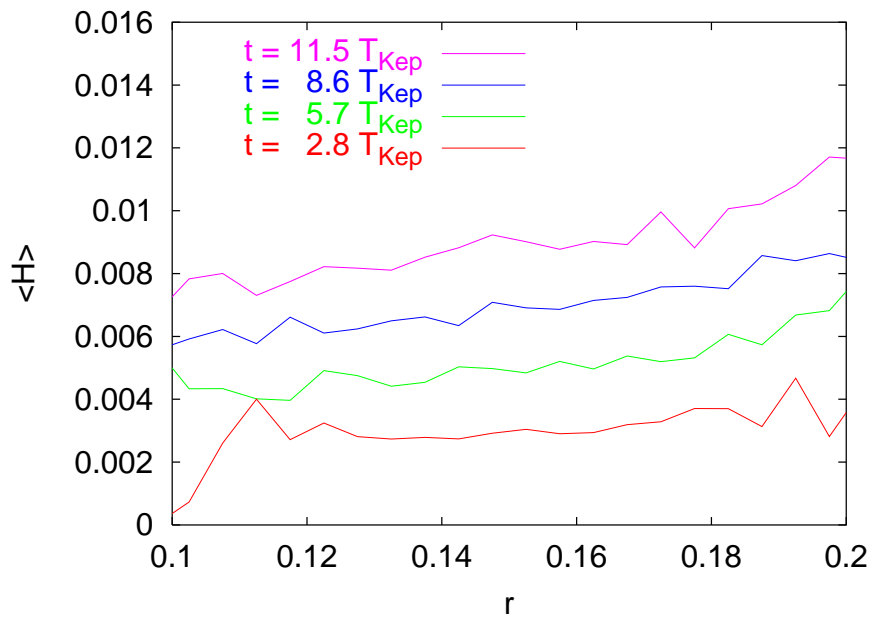


Abbildung 5.2.: Die mittlere vertikale Ausdehnung des Ringes  $\langle H \rangle$  [ $R_{\odot}$ ] in Abhängigkeit des Ortes  $r$  [ $R_{\odot}$ ] für verschiedene Zeitpunkte. Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

zusehen, dass die Auswertungen sich auf ein Zeitintervall beschränken, innerhalb dessen die Bedingung für eine dünne Scheibe erfüllt bleiben. Im Folgenden reicht dieses Intervall bis  $11.5 T_{\text{Kep}}$ .

## 5.2. Die hydrodynamischen 2D-Gleichungen

Die hier benötigten hydrodynamischen Gleichungen in Zylinderkoordinaten, d.h. die Kontinuitätsgleichung (A.17) und die Navier-Stokes-Gleichung (A.13), können also nur dann guten Gewissens in eine zwei-dimensionale Form gebracht werden, wenn die Bedingung (5.1) erfüllt und die Struktur der Scheibe in  $z$ -Richtung hinreichend einfach ist. Denn dann sind die relevanten Größen wie Raumdichte  $\rho$ , Druck  $p$  und die Zähigkeitskoeffizienten  $\eta$ ,  $\nu$ ,  $\zeta$  nicht empfindlich von der  $z$ -Koordinate abhängig und durch eine  $z$ -Integration der Gleichungen über die gesamte Scheibendicke von  $-H$  bis  $H$   $z$ -unabhängig zu machen, woraus dann die 2D-Form der hydrodynamischen Gleichungen folgt. Obwohl die daraus resultierenden Gleichungen  $z$ -unabhängig sind, darf nicht vergessen werden, dass der dadurch beschriebene zwei-dimensionale Materiefluss dennoch in einem drei-dimensionalen Raum eingebettet ist, insbesondere verhält sich die Volumenkraft nach wie vor proportional zu  $r^{-2}$ .

Für die Betrachtung einer dünnen Scheibe sind folgende Annahmen zu machen:

- es wird kein resultierender Materiefluss in  $z$ -Richtung gemessen, da die Geschwindigkeitskomponenten  $\langle v_r \rangle$ ,  $\langle v_\phi \rangle$  und  $\langle v_z \rangle$  gemittelte Größen darstellen und deshalb  $\langle v_z \rangle \approx 0$ , während für die anderen beiden Komponenten  $\langle v_r \rangle \approx 0$  mit  $\langle v_r \rangle \ll \langle v_\phi \rangle$  gilt
- $\langle v_r \rangle$  und  $\langle v_\phi \rangle$  seien nicht  $z$ -abhängig, sondern über die gesamte vertikale Breite konstant. Damit verschwinden auch die Tensorkomponenten  $T_{\alpha z}$  und  $T_{z\beta}$ , mit  $\alpha, \beta \neq z$
- bei der  $z$ -Integration der hydrodynamischen Gleichungen soll

$$\Sigma := \int_{-H}^H \rho dz, \quad p^* := \int_{-H}^H p dz, \quad \eta^* := \int_{-H}^H \eta dz, \quad \zeta^* := \int_{-H}^H \zeta dz$$

gelten, wodurch die zwei-dimensionalen Größen Flächendichte  $\Sigma$ , Druck  $p^*$ , dynamische Viskosität  $\eta^*$  und Volumenviskosität  $\zeta^*$  eingeführt werden können, wobei für die  $z$ -integrierte kinematische Viskosität

$$\nu^* := \eta^* / \Sigma \tag{5.2}$$

gilt; sie alle sind nun von der  $z$ -Koordinate unabhängig

Zur Vereinfachung der hieraus resultierenden  $2D$ -Gleichungen werden noch zusätzliche Näherungen gemacht:

- das System sei für alle Zeiten rotationssymmetrisch, d.h.  $\partial/\partial\phi \equiv 0$
- die Volumenviskosität ist gegenüber der Scherviskosität zu vernachlässigen, d.h. in den Gln. (A.14) gilt  $\zeta \approx 0$
- der übrig bleibende radiale Druckgradient ist gegenüber den viskosen Termen zu vernachlässigen, d.h.  $\partial p/\partial r \approx 0$ , da in der Theorie der Akkretionsscheiben auf Grund der *turbulenten kinematischen Viskosität* [15] diese viskosen Terme als sehr viel größer angenommen werden als der Druckgradient

Mit diesen Annahmen und Näherungen folgt für die hydrodynamischen Gleichungen in Zylinderkoordinaten, d.h. im Falle der Kontinuitätsgleichung Gl. (A.17) die  $2D$ -Form

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Sigma r v_r)}{\partial r} = 0 \quad (5.3)$$

und im Falle der drei Komponenten der Navier-Stokes-Gleichung (A.13) die  $2D$ -Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{GM_c}{r^2} \\ + \frac{1}{\Sigma} \frac{2}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ \nu^* \Sigma \left( \frac{2}{3} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} - v_r \right) \right] + \frac{\nu^* \Sigma}{r} \left( \frac{1}{3} \frac{\partial(rv_r)}{\partial t} - v_r \right) \right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} = \frac{1}{\Sigma} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^3 \nu^* \Sigma \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right], \quad (5.5)$$

$$\int_{-H}^H \left[ \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial \eta}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{GM_c z}{r^3} \right] dz = 0, \quad (5.6)$$

wenn man noch die Gln. (A.12) und (A.14) zu Hilfe nimmt. Die Integration der  $z$ -Komponente der Navier-Stokes-Gleichung ist noch nicht ausgeführt worden, da sie - wie im Folgenden noch gezeigt - eine Sonderstellung einnimmt.

Während mit der  $r$ - und  $\phi$ -Komponente Gl. (5.4) und (5.5) Aussagen über die zeitliche Entwicklung des Ringes in der  $r, \phi$ -Ebene gemacht werden können, kann die  $z$ -Komponente Gl. (5.6) Aufschluss über die vertikale Teilchenzahldichte zu einem bestimmten Zeitpunkt geben.

### 5.3. Der radial viskos zerfließende Ring

In diesem Abschnitt werden nun die  $r$ - und  $\phi$ -Komponente der  $2D$ -NSG näher betrachtet, um Aussagen über die dynamische Entwicklung des Ringes mit der Zeit zu gewinnen.

Dazu können die  $2D$ -Gleichungen vereinfacht werden, wenn man annimmt, dass ausschließlich die  $z$ -integrierte kinematische Viskosität  $\nu^*$  dafür verantwortlich ist, dass der Ring radial (aber auch – wie später noch gezeigt wird – vertikal) auseinander fließt und damit nichtverschwindende radiale Geschwindigkeitskomponenten auftreten. Das soll heißen, dass mit  $\nu^*$  auch  $\langle v_r \rangle$  zu- bzw. abnimmt. Da nun, wie in Abschnitt 2.2 gezeigt,  $\langle v_r \rangle \ll \langle v_\phi \rangle$  ist, sollte auch  $\nu^*$  klein sein.  $\nu^*$  wird somit als hinreichend klein angenommen, so dass dann alle Terme in Gl. (5.4), in denen  $\nu^*$  vorkommt, gegenüber der Volumenkraft  $-GM_c/r^2$  vernachlässigt werden können und, da  $\langle v_r \rangle \approx 0$  sei, ebenfalls auch jene Terme, in denen  $\langle v_r \rangle$  enthalten ist. Dann vereinfacht sich Gl. (5.4) ein weiteres Mal zu

$$-\frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{GM_c}{r^2}, \quad (5.7)$$

wohingegen die Terme mit  $\nu^*$  in Gl. (5.5) erhalten bleiben. Mit Gl. (5.7) folgt nochmals die Erkenntnis, dass sich das Scheibenmaterial hauptsächlich mit Keplergeschwindigkeit bewegt. Setzt man nun die Keplergeschwindigkeit in die  $\phi$ -Komponente (5.5) der NSG ein und nimmt an, dass die mittlere Tangentialgeschwindigkeit des Ringmaterials im Allgemeinen keinen zeitlichen Änderungen unterworfen ist, d.h.  $\partial v_\phi / \partial t \approx 0$ , dann folgt

$$v_r = -\frac{3}{\Sigma r^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} (\nu^* r^{1/2} \Sigma). \quad (5.8)$$

Man erkennt, dass der mittlere radiale Massenfluss von  $\nu^*$  abhängig ist und, wie oben angenommen, auch verschwindet, wenn  $\nu^*$  verschwindet. Wenn man Gl. (5.8) in die Kontinuitätsgleichung (5.3) einsetzt, dann erhält man eine nicht-lineare Diffusionsgleichung für die Oberflächendichte, welche eine von der Zeit und vom Ort abhängige Entwicklungsgleichung darstellt:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\nu^* r^{1/2} \Sigma) \right]. \quad (5.9)$$

Diese Gleichung kann numerisch gelöst werden, aber auch eine analytische Lösung gelingt für eine besondere Abhängigkeit der  $z$ -integrierten kinematischen Viskosität vom Ort, nämlich für die spezielle Form

$$\nu^*(r) = \nu_0 r^\alpha. \quad (5.10)$$

Nur für diese Ortsabhängigkeit von  $\nu^*$  ist die Diffusionsgleichung analytisch lösbar. Im Allgemeinen wird die Viskosität zwar vom Ort abhängig sein, aber ob



in dieser Art und Weise, ist nicht bekannt, sollte aber durch Simulationen überprüft werden können. Mit den Substitutionen  $x = r/r_0$  als neue Ortsvariable (in Einheiten des anfänglichen Radius'  $r_0$  für  $t = 0$ ) und  $\tau_{\text{visk}} = t/t_{\text{visk}} = 12\nu_0 t/r_0^{2-\alpha}$  als neue Zeitvariable (in Einheiten der *viskosen Zeitskala*  $t_{\text{visk}} = r_0^{2-\alpha}/12\nu_0$ ) folgt die analytische Lösung für die Oberflächendichte

$$\Sigma(r, t) = \frac{M}{\pi r_0^2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{\tau_{\text{visk}} x^{1/4+\alpha}} I_n \left( \frac{2x}{\tau_{\text{visk}} x^{\alpha/2}} \right) \exp \left( -\frac{1+x^{2-\alpha}}{\tau_{\text{visk}}} \right), \quad (5.11)$$

worin  $M$  die Scheibenmasse und  $I_n$  die modifizierte Bessel-Funktion der Ordnung  $n = 1/(4 - 2\alpha)$  sind.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  entspricht die Verteilung der Oberflächendichte in radialer Dimension einer Delta-Distribution der Form

$$\Sigma_0(r) = \frac{M}{2\pi r_0} \delta(r - r_0) .$$

Für den speziellen Fall  $\alpha = 0$  wird für die Lösung der Diffusionsgleichung eine konstante  $z$ -integrierte kinematische Viskosität  $\nu^* = \nu_0 = \text{const.}$  angenommen. Mit diesem speziellen Ansatz folgt für die orts- und zeitunabhängige Viskosität als Lösung für die Oberflächendichte

$$\Sigma(r, t) = \frac{M}{\pi r_0^2} \frac{1}{\tau_{\text{visk}} x^{1/4}} I_{\frac{1}{4}} \left( \frac{2x}{\tau_{\text{visk}}} \right) \exp \left( -\frac{1+x^2}{\tau_{\text{visk}}} \right) . \quad (5.12)$$

Die darin vorkommende komplexwertige modifizierte Bessel-Funktion der Ordnung  $n = \frac{1}{4}$  und dem Argument  $z = 2x/\tau_{\text{visk}}$  lautet

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{4}}(z) &= e^{-\frac{1}{8}i\pi} J_{\frac{1}{4}}(ze^{\frac{1}{2}i\pi}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}ze^{\frac{1}{2}i\pi}\right)^{\frac{1}{4}+2k}}{k! \Gamma(\frac{5}{4} + k)} e^{-\frac{1}{8}i\pi} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{\frac{1}{4}+2k}}{k! \Gamma(\frac{5}{4} + k)}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

worin  $J_{\frac{1}{4}}$  die Bessel-Funktion der Ordnung  $\frac{1}{4}$  und  $\Gamma(\frac{5}{4} + k)$  die Gamma-Funktion sind. Die Komplexwertigkeit in der mittleren Zeile geht verloren, da  $e^{i\pi k} = \cos(\pi k) + i \sin(\pi k) = (-1)^k$  für  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$  ist.

Für eine verschwindende kinematische Viskosität  $\nu_0$  würde die Oberflächendichte nicht definiert sein, da  $\tau_{\text{visk}}$  in mehreren Nennern von Gl. (5.11) vorkommt, womit dann auch kein viskoses Zerfließen auftreten könnte. Da dies aber offensichtlich der Fall ist, muss  $\nu_0 \neq 0$  gelten. Für nichtverschwindende  $\nu_0$  ist also ein Zerfließen analytisch zu sehen, woraus der Schluss gezogen werden kann, dass das viskose

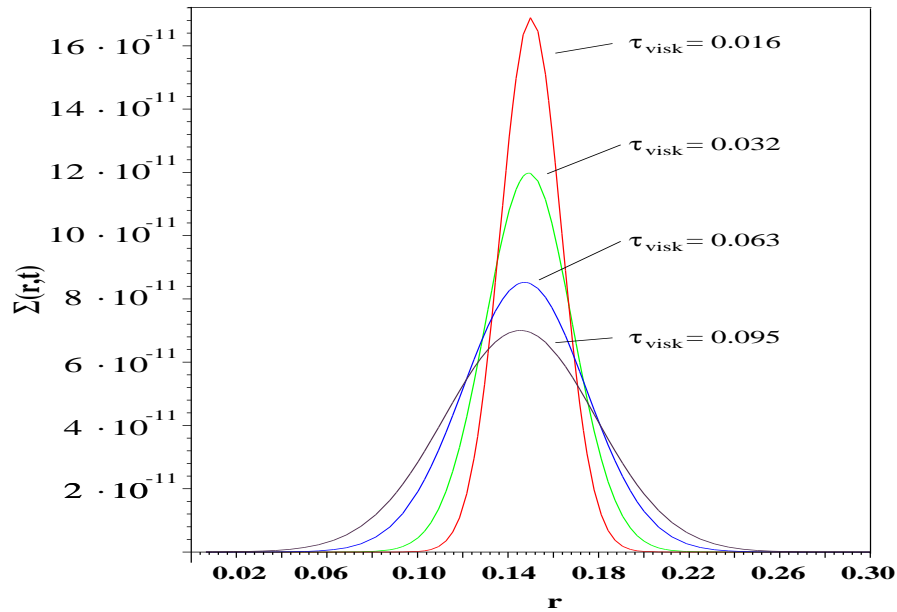


Abbildung 5.3.: Die analytische Lösung (5.12) zeigt einen radial viskos zerfließenden Ring zu vier verschiedenen Zeiten. Aufgetragen ist die Oberflächen-dichte  $\Sigma(r, t)$  [ $M_{\odot}/R_{\odot}^2$ ] über den Ort  $r$  [ $R_{\odot}$ ]. Es ist:  $M = 5.37 \cdot 10^{-12} M_{\odot}$ ,  $r_0 = 0.151 R_{\odot}$  und  $\nu_0 = 3 \cdot 10^{-10} R_{\odot}^2/\text{s}$ .

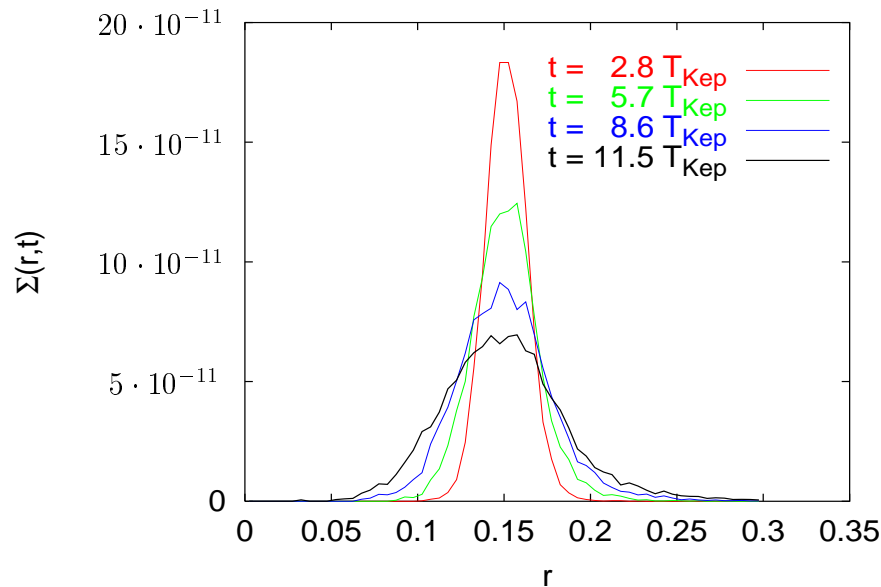


Abbildung 5.4.: Die Simulation zeigt einen radial viskos zerfließenden Ring zu vier verschiedenen Zeiten. Aufgetragen ist die Oberflächen-dichte  $\Sigma(r, t)$  [ $M_{\odot}/R_{\odot}^2$ ] über den Ort  $r$  [ $R_{\odot}$ ] für eine dissipationsfreie Simulation mit  $\epsilon = 1.00$ . Es ist:  $M = 5.37 \cdot 10^{-12} M_{\odot}$  und  $r_0 = 0.151 R_{\odot}$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

Zerfließen ausschließlich auf die kinematische Viskosität zurückzuführen ist, welche letztendlich durch die differenzielle Rotation hervorgerufen wird.

Die analytische Lösung für die radiale Aufweitung zeigt Abb. 5.3 für verschiedene Zeiten, im Vergleich dazu ist in Abb. 5.4 das Zerfließen in der Simulation zu sehen. Für große viskose Zeiten verschiebt sich das Maximum der Kurven in Richtung kleinere Orte, d.h. näher zur Zentralmasse – was andeutungsweise in der analytischen Lösung zu erkennen ist. Ein Großteil der Masse fließt nach innen, verliert daher Energie und Drehimpuls, während sich ab einem bestimmten Radius die Materie nach außen bewegt und wieder Drehimpuls aufnimmt. Letztendlich resultiert für große Zeiten ein Massenfluss in Richtung Zentralmasse.

Der Übergang von der mikroskopischen Betrachtungsweise der Simulation zu der makroskopischen Theorie der Hydrodynamik wird nun in der Weise bewältigt, dass die Information über die Oberflächendichte  $\Sigma$  (Projektion der Massen aller Teilchen innerhalb eines Teilrings auf dessen Grundfläche  $\rightarrow$  Massenbelegung dieser Grundfläche) aus der Simulation gewonnen und auf Konsistenz mit der obigen analytischen Lösung überprüft wird. Die analytische Lösung dient also als Modellfunktion. Die zur Anpassung von Theorie an das Simulationsergebnis zu variierenden Parameter sind in Gl. (5.12) die Größen  $r_0$  und die  $z$ -integrierte kinematische Viskosität  $\nu_0$ , welche ja in  $\tau_{\text{visk}}$  eingeht.

Wie verhalten sich nun die durch Gl. (5.12) dargestellten analytischen Kurven für unterschiedliche viskose Zeiten? Wie zu erwarten, zerfließt ein dissipationsfreier

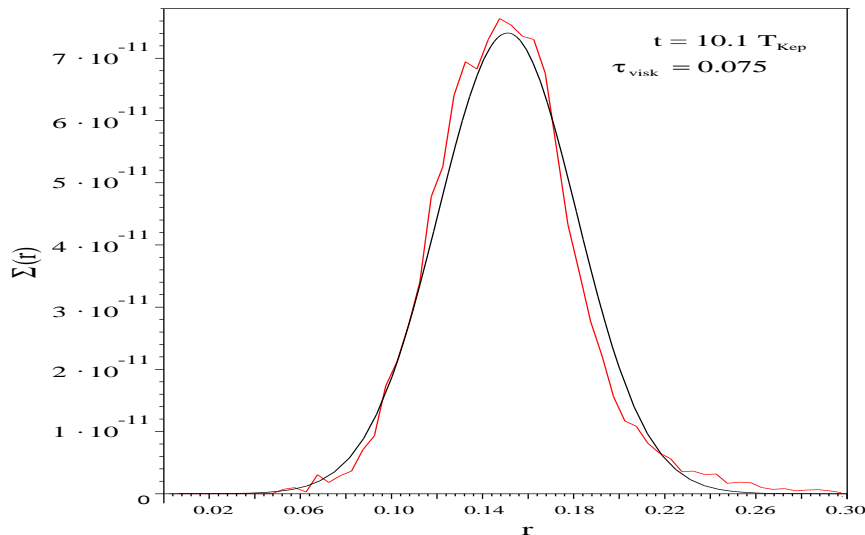


Abbildung 5.5.: Beispiel für einen Fit einer analytischen Kurve an eine Datenkurve zur Zeit  $t = 10.1 T_{\text{Kep}}$ .  $M$  und  $\epsilon$  wie oben, Fitparameter hierfür:  $r_0 = 0.155 R_{\odot}$  und  $\nu_0 = 4.43 \cdot 10^{-10} R_{\odot}^2/\text{s}$ .

$t$ [T <sub>Kep</sub> ]	$\tau_{\text{visk}}$	$r_0$ [R <sub>☉</sub> ]	$\nu_0$ [ $10^{-9}$ R <sub>☉</sub> <sup>2</sup> /s]	HWB(d)/HWB(a)
2.8	0.013	0.152	0.257	1.0075
4.3	0.020	0.152	0.259	1.0532
5.7	0.029	0.153	0.280	1.0890
7.2	0.045	0.154	0.350	1.0765
8.6	0.057	0.155	0.380	1.0903
10.1	0.075	0.156	0.430	1.0893
11.5	0.100	0.156	0.450	1.0291

Tabelle 5.1.: Aus Fits zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  gewonnene Fitparameter  $r_0$ ,  $\nu_0$  und Quotient HWB(d)/HWB(a) aus der Halbwertsbreite der Daten- zur Halbwertsbreite der Ergebniskurve für  $N = 9108$  Teilchen mit  $\epsilon = 1.00$ .

$t$ [T <sub>Kep</sub> ]	$\tau_{\text{visk}}$	$r_0$ [R <sub>☉</sub> ]	$\nu_0$ [ $10^{-9}$ R <sub>☉</sub> <sup>2</sup> /s]	HWB(d)/HWB(a)
2.8	0.014	0.152	0.273	1.0252
4.3	0.022	0.152	0.286	1.0715
5.7	0.035	0.153	0.340	1.0461
7.2	0.051	0.153	0.400	1.0961
8.6	0.068	0.153	0.440	1.1370
10.1	0.087	0.153	0.485	1.1516
11.5	0.100	0.154	0.495	1.1787

Tabelle 5.2.: Aus Fits zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  gewonnene Fitparameter  $r_0$ ,  $\nu_0$  und Quotient HWB(d)/HWB(a) aus der Halbwertsbreite der Daten- zur Halbwertsbreite der Ergebniskurve für  $N = 18075$  Teilchen mit  $\epsilon = 1.00$ .

Ring mit zunehmender viskoser Zeit immer mehr (s. Abb. 5.3). Da  $\tau_{\text{visk}} \sim (\nu_0/r_0^2)t$  ist, kann die zeitliche Entwicklung (und damit das Breitfließen) eines Ringes beschleunigt werden, je größer das Verhältnis  $\nu_0/r_0^2$  gewählt wird. Damit vergrößert sich nämlich  $\tau_{\text{visk}}$ , wenn man den Ring zu einer bestimmten realen Zeit  $t$  betrachtet. Dagegen wird mit konstantem  $\nu_0$  und  $r_0$  die Kurven mit fortschreitender Zeit breiter (und in ihrer Intensität kleiner). Würde  $\nu_0$  mit der Zeit anwachsen, dann würde der Ring in seinem Breitfließen noch zusätzlich verstärkt werden, da die kinematische Viskosität wie die Zeit ebenfalls in  $\tau_{\text{visk}}$  eingeht.

Mit den Fitparametern  $r_0$  und  $\nu_0$  können nun die analytisch gewonnenen Kurven der Abb. 5.3 an die Kurven der Abb. 5.4 zu beliebigen Zeitpunkten angepasst werden. Als Kriterium für einen guten Fit wurden solche Wertepaare  $r_0, \nu_0$  ausgewählt, für die die Standardabweichungen (d.h. die Halbwertsbreiten) der analytischen mit denen der Ergebniskurven so gut wie möglich übereinstimmen und damit deren Quotient nahe bei 1 liegen sollte (s. z.B. letzte Spalte der Tab. 5.1 und 5.2). In Abb. 5.5 ist beispielsweise die analytische Modellfunktion  $\Sigma(r, t = 10.1$

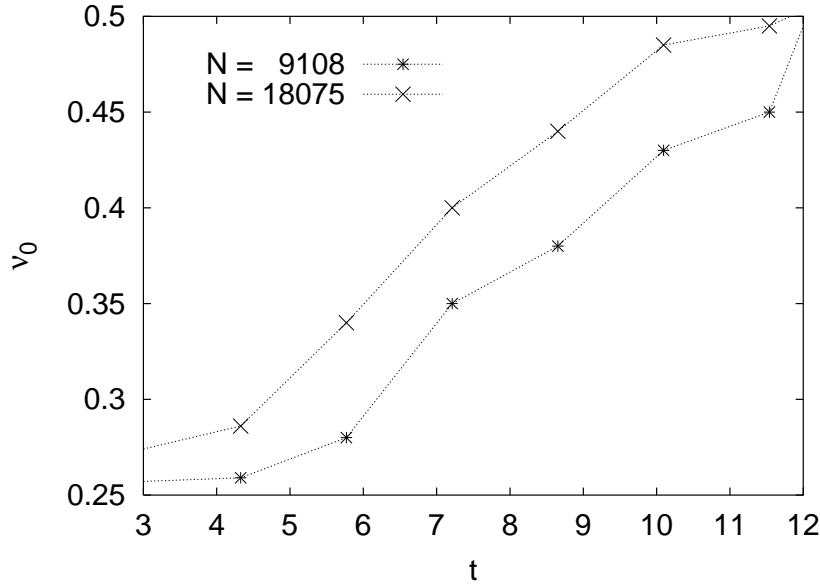


Abbildung 5.6.:  $z$ -integrierte kinematische Viskosität  $\nu_0$  [ $10^{-9} R_{\odot}^2/\text{s}$ ] für  $N = 9108$  und  $N = 18075$  Teilchen über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ], aufgetragen für den dissipationsfreien Fall (Daten: aus Tab. 5.1 und 5.2).

$T_{\text{Kep}}$ ) an die entsprechende Datenkurve angepasst und daraus  $r_0 = 0.155 R_{\odot}$  und  $\nu_0 = 4.43 \cdot 10^{-10} R_{\odot}^2/\text{s}$  bestimmt worden. Tab. 5.1 und 5.2 zeigen die Ergebnisse solcher Fits für verschiedene Zeitpunkte. Die Änderung des Fitparameters  $r_0$  liegt für  $N = 9108$  Teilchen bei etwa 2.6 %, für  $N = 18075$  Teilchen (s. Tab. 5.2) bei etwa 1.3 %, was in beiden Fällen zu vernachlässigen ist, womit  $r_0$  über das betrachtete Zeitintervall von  $9.2 T_{\text{Kep}}$  als konstant angesehen werden kann. Demgegenüber nimmt  $\nu_0$  über die Zeit von  $9.2 T_{\text{Kep}}$  um etwa 75 % bei 9108 Teilchen und um ca. 81 % bei 18075 Teilchen zu. Dies verdeutlicht auch Abb. 5.6. D.h. im Gegensatz zu der Annahme einer konstanten  $z$ -integrierten kinematischen Viskosität, wie sie bei der Herleitung der Diffusionsgleichung (5.12) gemacht wurde, erweist sich  $\nu_0$  als zeitabhängig, d.h.  $\nu_0 = \nu_0(t)$ .

## 5.4. Der vertikal viskos zerfließende Ring

Das in den dissipationsfreien Simulationen neben dem radialen auch beobachtete vertikale Zerfließen des Ringes wird ebenfalls durch das Auftreten scherviskoser Kräfte auf Grund der differentiellen Rotation verursacht. Theoretisch wird diese vertikale Dynamik durch die Gleichung (5.6) beschrieben bzw. durch (da auf die 2D-Darstellung bei der Betrachtung der vertikalen Dynamik verzichtet werden

kann)

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{GM_c z}{r^3} = 0 . \quad (5.14)$$

Da nun sich der Ring spiegelsymmetrisch zur  $x, y$ -Ebene ausdehnt und die Geschwindigkeiten der NSG gemittelte Größen darstellen, wird sich - wie bereits bei der Herleitung der hydrodynamischen  $2D$ -Gleichungen in Abschnitt 5.2 angenommen - ein vertikaler Massenfluss herausmitteln, d.h.  $\langle v_z \rangle \approx 0$ , da in etwa genauso viele Teilchen in positive wie in negative  $z$ -Richtung strömen. Die damit verbundenen viskosen Spannungen  $(\nabla \cdot \underline{T}) \cdot \mathbf{e}_z$  mitteln sich zu Null, da sie oberhalb der  $x, y$ -Ebene in positive, unterhalb der Ebene in negative  $z$ -Richtung weisen und von gleichem Betrag sind. Damit wird auch der daraus folgende scherviskose Term  $\frac{2}{3} \frac{\partial \eta}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{v}$  der Gl. (5.6) verschwinden, womit diese dann in Gl. (5.14) übergeht, welche das Kräftegleichgewicht zwischen vertikalem Druckgradienten und der  $z$ -Komponente der Volumenkraft darstellt. Durch Verschwinden dieses scherviskosen Termes entkoppelt sich die  $z$ -Komponente der NSG von der  $r$ - und  $\phi$ -Komponente ([16], [17]), da in ihr keine Geschwindigkeiten mehr vorkommen, und die vertikale Dynamik kann als unabhängig von der radialen Dynamik betrachtet werden.

Nimmt man für den  $z$ -abhängigen Druck die Zustandsgleichung des idealen Gases (da hier die Temperaturkomponente für nur einen Freiheitsgrad betrachtet wird, ist  $T_{g,z} = mv_{T,z}^2$  gültig)

$$p(z) = \frac{N(z)}{V(z)} T_{g,z} = n(z) m v_{T,z}^2 \quad (5.15)$$

an, so folgt mit  $\rho(z) = n(z)m$  aus Gl. (5.14) eine durch Trennung der Variablen zu lösende gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial n}{n} = -\frac{\Omega^2}{v_{T,z}^2} z \partial z , \quad (5.16)$$

welche mit  $\Omega^2 = GM/r^3$  als Keplerkreisfrequenz die Lösung für die vertikale Teilchenzahldichte

$$n(z) = n(0) \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{v_{T,z}^2} z^2 \right) \quad (5.17)$$

besitzt. Hierin ist  $n(0)$  die vertikale Teilchenzahldichte für die Äquatorialebene  $z = 0$  des Systems. Aus Gl. (5.17) kann man eine nur von der  $z$ -Temperatur abhängende mittlere vertikale Skalenhöhe (Standardabweichung für  $z$ )

$$\langle H \rangle = \frac{v_{T,z}}{\Omega} = \sqrt{\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2} \approx \sqrt{\langle z^2 \rangle} \quad (5.18)$$

erkennen, wobei  $\langle z \rangle$  sich heraus mittelt. Dies lässt deutlich erkennen, dass die vertikale Ausdehnung linear von der vertikalen Geschwindigkeitsdispersion abhängt. Außerdem hängt sie über  $\Omega$  auch noch davon ab, welchen mittleren Abstand der Ring vom Zentralkörper hat.

### 5.4.1. Bestimmung von $v_{T,z}$ und $n(0)$

Abb. 5.7 zeigt für eine dissipationsfreie Simulation die vertikale Verteilung der Teilchenzahldichte  $n(z)$  für die (radiale) Ringmitte. Wie zu erkennen, zerfließt dieser Ring auch in vertikale Richtung relativ schnell. Einen quantitativen, vom radialen Ort abhängigen Ausdruck für dieses Verhalten gibt Gl. (5.17) wieder; sie beinhaltet jedoch keine Zeitabhängigkeit, weshalb sie keine Entwicklungsgleichung im Sinne des Abschnittes 5.3 ist. Sie beschreibt lediglich das örtliche Verhalten der vertikalen Teilchenzahldichte, welche separat für unterschiedliche Zeiten jeweils an die Daten angepasst wird. Die theoretische Kurve, welche aus Gl. (5.17) zu erhalten ist, ist in Abb. 5.8 zu einer bestimmten Zeit als eine mit Quadraten versehene Modellkurve eingezeichnet. Sie wird zu verschiedenen Zeiten über die Fitparameter  $n(0)^{\text{fit}}$  und  $v_{T,z}^{\text{fit}}$  an die Datenkurven angepasst. In Tab. 5.3 sind die

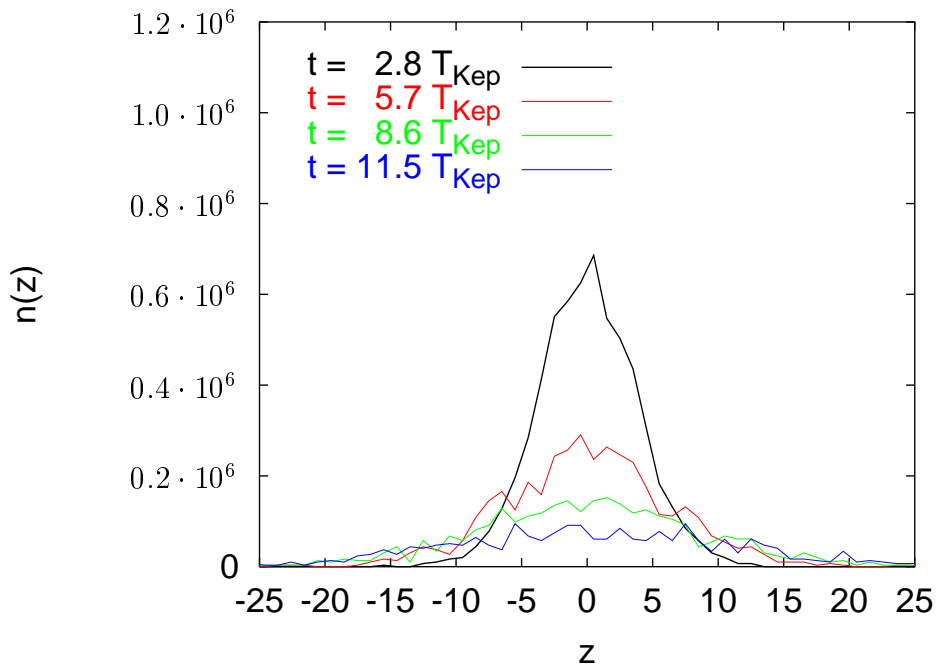


Abbildung 5.7.: Vertikale Verteilung der Teilchenzahldichte  $n(z)$  [Teilchen/ $R_{\odot}^3$ ] am radialen Ort  $r \approx 0.151 R_{\odot}$  über den axialen Ort  $z$  [ $2R$ ] zu vier verschiedenen Zeitpunkten ( $N = 9108$ ,  $\epsilon = 1.00$ ,  $\Omega = 0.00018$  1/s). Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

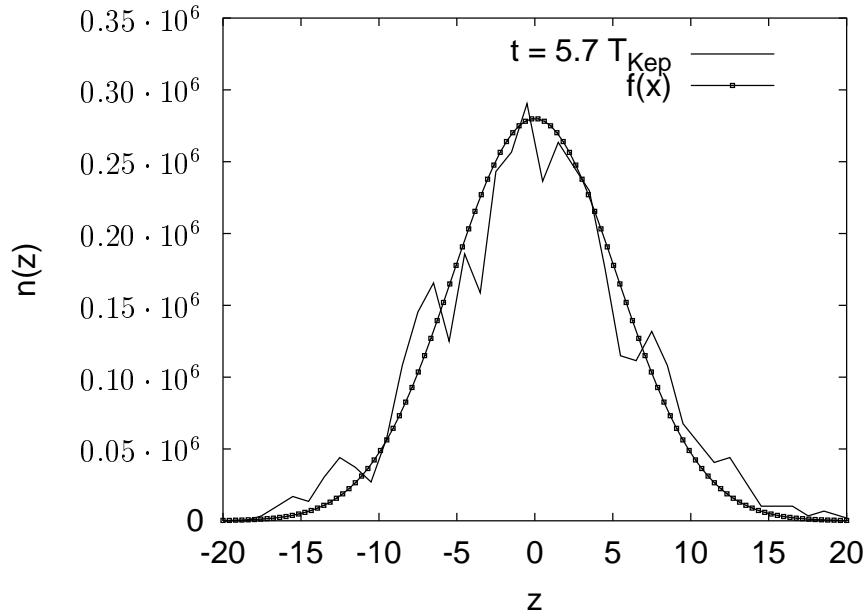


Abbildung 5.8.: Durch Anpassung einer Modellfunktion  $f(x)$  der Form von Gl. (5.17) für die Zeit  $t = 5.7 T_{\text{Kep}}$  folgen  $v_{T,z} = 7.5 \cdot 10^{-7} R_{\odot}/s$  und  $n(0) = 280000$  Teilchen/ $R_{\odot}^3$ . Einheiten der Achsen s. Abb. 5.7.

so erhaltenen Fitparameter für vier verschiedene Zeiten eingetragen und den aus der Simulation erhaltenen Größen  $v_{T,z}^{\text{sim}}$  und  $\langle H \rangle^{\text{sim}}$  gegenüber gestellt. Hierbei ist  $\langle H \rangle^{\text{sim}}$  aus den Simulationsergebnissen für die mittlere vertikale Skalenhöhe zu bestimmen. Auf Konsistenz wird dann  $\langle H \rangle^{\text{sim}}$  geprüft, indem sein theoretischer Wert mittels Gl. (5.18) bestimmt und zum Vergleich benutzt wird. Die Geschwindigkeitsdispersion  $v_{T,z}$  z.B. kann dann auf Konsistenz mit den Ergebnissen in Abb. 4.11 überprüft werden, ebenso auch die aus Gl. (5.18) errechnete mittlere vertikale Skalenhöhe mit der aus der Simulation ( $\rightarrow$  Abb. 5.1) gewonne-

$t$	$v_{T,z}^{\text{fit}}$	$n(0)^{\text{fit}}$	$v_{T,z}^{\text{sim}}$	$\langle H \rangle^{\text{sim}}$	$\langle H \rangle^{\text{theo}}$
2.8	$5.00 \cdot 10^{-7}$	670000	$5.10 \cdot 10^{-7}$	0.0030	0.0029
5.7	$7.50 \cdot 10^{-7}$	280000	$8.40 \cdot 10^{-7}$	0.0048	0.0047
8.6	$1.05 \cdot 10^{-6}$	150000	$1.10 \cdot 10^{-6}$	0.0069	0.0062
11.5	$1.55 \cdot 10^{-6}$	80000	$1.70 \cdot 10^{-6}$	0.0090	0.0095

Tabelle 5.3.:  $v_{T,z}^{\text{fit}}$ ,  $n(0)^{\text{fit}}$  folgen aus den Fits (s. Abbn. 5.7, 5.8),  $v_{T,z}^{\text{sim}}$  aus der Abb. 4.11,  $\langle H \rangle^{\text{sim}}$  aus Abb. 5.2 und es gilt  $\langle H \rangle^{\text{theo}} = v_{T,z}^{\text{sim}}/\Omega$  mit  $\Omega \approx 0.00018$  1/s. Die Zeit  $t$  ist wieder in Keplerperioden angegeben.



nen. Tab. 5.3 zeigt eine gute Übereinstimmung dieser Vergleiche mit einem Fehler von maximal 10 % bei der  $z$ -Geschwindigkeitsdispersion und von knapp 11 % bei  $\langle H \rangle$ . Die Übereinstimmung ist recht gut, rechtfertigt sie doch die Gültigkeit der quantitativen Beschreibung von  $\langle H \rangle$  durch die vereinfachte  $z$ -Komponente. Dies wiederum bestätigt dann auch die tatsächliche Entkopplung der axialen von der radialen Komponente der NSG.

### 5.4.2. Die Entkopplung der NSG-Komponenten

Auf Grund des zur  $x, y$ -Ebene symmetrischen Zerfließens des Ringes verschwindet die Geschwindigkeitsabhängigkeit der  $z$ -Komponente der NSG, was sie von den übrigen Komponenten entkoppelt. Dies bedeutet mathematisch, dass es keine (gemittelte) Größe mehr gibt, welche zugleich in die  $z$ -Komponente wie auch in die  $r$ - und  $\phi$ -Komponente eingeht. Damit kann sich der Ring in  $z$ -Richtung auch völlig andersartig entwickeln als in radiale Richtung. Einen weiteren experimentellen Beweis für die Entkopplung der NSG-Komponenten bringt die dynamische Entwicklung der Ringe. Da die Anfangskonfiguration für eine Simulation nicht den Gleichgewichtszustand des Systems repräsentiert, ergeben sich anfänglich, wie bereits an mehreren Stellen in dieser Arbeit erwähnt, Oszillationen des Gesamttringes sowohl in radialer wie auch in axialer Richtung. Diese spiegeln sich z.B. in der zeitlichen Entwicklung der kinetischen Gesamtenergie des Systems wider. Betrachtet man die kinetische Energie der radialen, d.h.  $E_{\text{kin},x} + E_{\text{kin},y}$ , und die der axialen Bewegung,  $E_{\text{kin},z}$ , unabhängig voneinander, dann erkennt man Oszillationen unterschiedlicher Periode. Dies zeigen die beiden Abbildungen 5.9

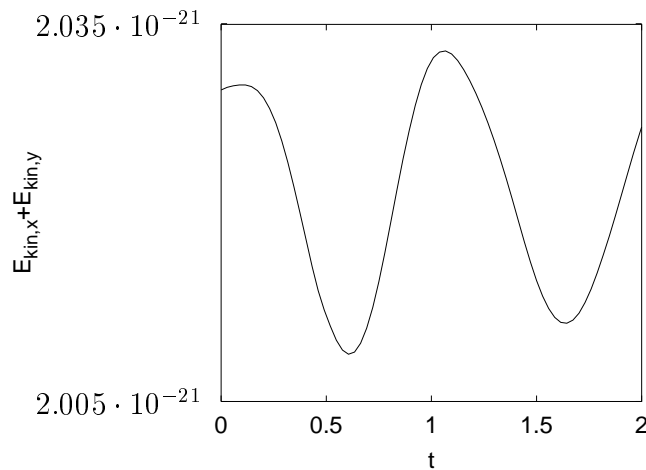


Abbildung 5.9.: Verlauf der Summe der  $x$ - und  $y$ -Komponente der kinetischen Energie  $E_{\text{kin},x} + E_{\text{kin},y}$  [ $M_{\odot} R_{\odot}^2 / s^2$ ] über die Zeit  $t$  [T<sub>Kep</sub>].

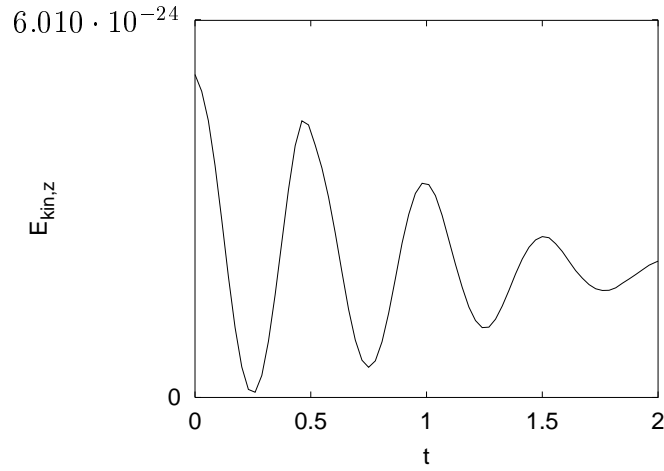


Abbildung 5.10.: Verlauf der  $z$ -Komponente der kinetischen Energie  $E_{\text{kin},z}$  [ $M_{\odot} R_{\odot}^2 / \text{s}^2$ ] über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ].

und 5.10 (für die Anfangskonfiguration wurde eine von Null verschiedene axiale Geschwindigkeit  $v_{z,0} = 0.05 \cdot v_{\text{Kep},S}$  gewählt – Näheres dazu ist im Anhang D nachzulesen).

Während die radiale kinetische Energie eine Periode von etwa  $1 T_{\text{Kep}}$  und damit eine Eigenfrequenz von  $2\pi T_{\text{Kep}}^{-1}$  besitzt, erkennt man bei der kinetischen Energie für die  $z$ -Komponente die erwartete, jedoch geringere Periode ( $\sim 0.5 T_{\text{Kep}}$ ) und damit die höhere Eigenfrequenz von etwa  $4\pi T_{\text{Kep}}^{-1}$ . Diese Dynamik in  $z$ -Richtung ist verständlich, da die kinetische Energie pro Keplerperiode zwei Minima (an den Umkehrpunkten) bzw. Maxima (in der Äquatorialebene) annimmt. Die Oszillation in radiale Richtung koppelt sich in der Weise davon ab, dass der Ring innerhalb zweier Keplerperioden radial einmal um eine Ruhelage schwingt. Diese hinsichtlich der radialen und der axialen Dimension unterschiedliche oszillatorische Dynamik bringt die Entkopplung der NSG-Komponenten recht gut zum Ausdruck.

## 6. Die Dynamik von Systemen mit Dissipation

Bei einem inelastischen Stoß wird die Stoßdauer länger sein als bei einem elastischen Stoß, da die Teilchen bei Überlappung nicht mehr so starke Rückstellkräfte erfahren (s. Abschnitt 3.1). Auch hängt die Inelastizität der Stöße von dem Material ab, aus dem sie bestehen und natürlich auch vom Aggregatzustand, in welchem sie sich befinden. Es wird Unterschiede in  $\epsilon$  geben, wenn man einerseits Stöße zwischen eisigen Felsbrocken in planetarischen Ringen, andererseits zwischen reibenden Gasmassen in Akkretionsscheiben betrachtet. Stöße zwischen Festkörpern werden keine zu niedrigen Restitutionskoeffizienten aufweisen, da, bevor zu viel kinetische Energie verloren geht, die Teilchen auseinander brechen können und die kinetische Energie auf die Fragmente verteilt wird. D.h. in der Realität entspräche ein inelastischer Stoß einer Umwandlung kinetischer Energie in elastische Energie (Deformationsenergie), wobei die Teilchen verformt werden oder einfach zerfallen würden. In diesem Kapitel sollen nun nur die Ergebnisse und Auswirkungen in Systemen mit  $\epsilon < 1$  präsentiert werden, wobei  $\epsilon$  nicht von der Impaktgeschwindigkeit (also der Relativgeschwindigkeit der Teilchen unmittelbar vor dem Stoß) abhängen soll. Vorbereitende Theorie wurde bereits im vorangegangenen Kapitel besprochen, muss also hier nicht mehr aufgeführt werden.

Es werden Systeme untersucht, die eine von Null verschiedene Kühlrate haben, d.h. es geht bei Teilchenstößen kinetische Energie verloren. Es wurde die zeitliche Entwicklung von Systemen untersucht, für die die verschiedensten Restitutionskoeffizienten eingestellt waren. All diese Simulationen haben gegenüber solchen, für die  $\epsilon = 1$  gilt, eine Kühlung gemeinsam, die die *immer* auftretende Heizung durch die differenzielle Rotation zu kompensieren versucht. Je nach dem, wie hoch die Dissipationsrate ist, wird dem System mehr oder weniger kinetische Energie entzogen, was natürlich auch zu einer Abnahme der Gesamtenergie führt. Durch Einschalten der normalen Restitution wird das System gekühlt und die Geschwindigkeitsdispersionskomponenten werden mit der Zeit nicht mehr so stark zunehmen. Wird zu stark gekühlt, dann kann die Temperatur in den dissipativen Systemen sogar abnehmen, womit dann ein Schwellwert für den Restitutionskoeffizienten unterschritten wurde (s. Abschnitt 4.1).

## 6.1. Der radial viskos zerfließende Ring

Wie in anderen Publikationen gezeigt (darunter auch [2]), sind bei hohen Kühlraten die viskosen Scherspannungen nicht mehr imstande, den Ring radial (wie auch vertikal) breitfließen zu lassen. Die (kinetische) Energie, die dazu aufzuwenden ist, wird durch die sehr inelastische Natur der Stöße vernichtet, d.h. dissipiert. Der Ring wird für einen Restitutionskoeffizienten, der unterhalb des Schwellwertes liegt (s. Abschnitt 4.1), radial nicht mehr so schnell auseinander fließen wie dissipationfreie Simulationen es zeigen, sondern höchstens auf einer sehr langen Zeitskala ein Zerfließen erfahren.

In diesem Abschnitt soll nochmals die analytische Lösung (5.12) des radial viskos zerfließenden Ringes untersucht werden. Da sie keine Terme beinhaltet, die die Energiedissipation auf Grund von Teilchenkollisionen berücksichtigt, macht es eigentlich wenig Sinn, das (zeitliche) Verhalten der  $z$ -integrierten kinematischen Viskosität (s. Abschnitt 5.3) für dissipative Systeme zu untersuchen. Dennoch soll hier in dieser Hinsicht zumindest auf schwach dissipative Systeme kurz eingegangen werden. Im Folgenden sei eine Simulation mit  $\epsilon = 0.95$  näher betrachtet. Im Gegensatz zu dem radialen Zerfließen eines dissipationfreien Ringes, was in Abb. 5.4 bereits aufgezeigt wurde, erkennt man in Abb. 6.1 ein leicht schwächeres radiales Zerfließen, da die Intensitäten zu denselben Zeiten noch ein wenig größer sind als die für die dissipationfreie Simulation. Die Bestimmung der Werte für

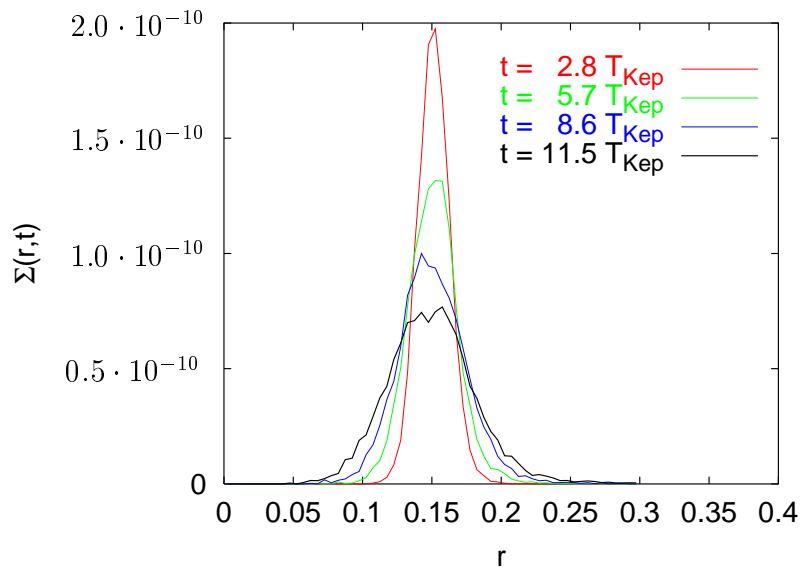


Abbildung 6.1.: Die Simulation zeigt einen radial viskos zerfließenden Ring zu vier verschiedenen Zeiten. Aufgetragen ist die Oberflächendichte  $[M_{\odot}/R_{\odot}^2]$  über den Ort  $[R_{\odot}]$  für eine Simulation mit  $\epsilon = 0.95$ . Es ist:  $M = 5.37 \cdot 10^{-12} M_{\odot}$  und  $r_0 = 0.151 R_{\odot}$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

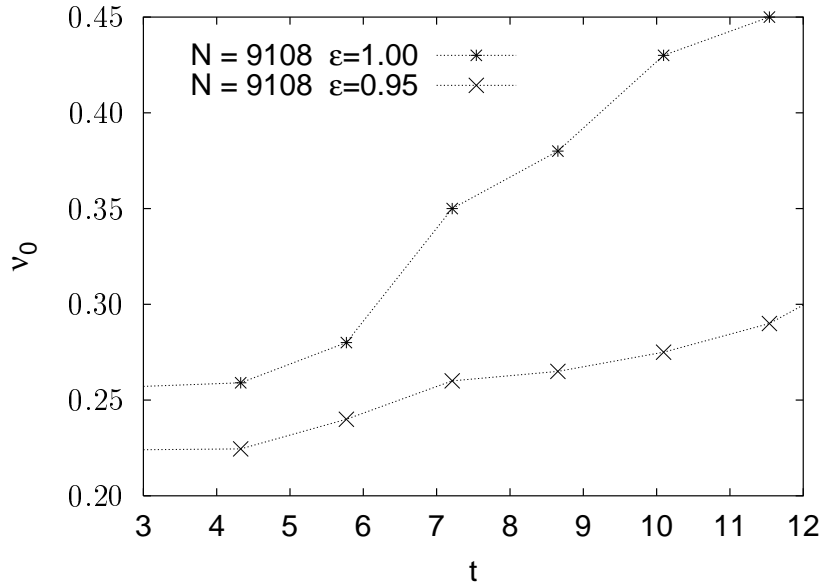


Abbildung 6.2.:  $z$ -integrierte kinematische Viskosität  $\nu_0$  [ $10^{-9} R_{\odot}^2/s$ ] für  $N = 9108$  Teilchen über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ], aufgetragen für  $\epsilon = 1.00$  und  $0.95$  (Daten: aus Tab. 5.1 und 6.1).

$t$ [ $T_{\text{Kep}}$ ]	$\tau_{\text{visk}}$	$r_0$ [ $R_{\odot}$ ]	$\nu_0$ [ $10^{-9} R_{\odot}^2/s$ ]	HWB(d)/HWB(a)
2.8	0.012	0.152	0.224	1.035
4.3	0.018	0.152	0.225	1.051
5.7	0.025	0.152	0.240	1.087
7.2	0.034	0.152	0.260	1.105
8.6	0.041	0.152	0.265	1.164
10.1	0.050	0.152	0.275	1.199
11.5	0.060	0.153	0.290	1.232

Tabelle 6.1.: Aus Fits zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  gewonnene Fitparameter  $r_0$ ,  $\nu_0$  und Quotient HWB(d)/HWB(a) aus der Halbwertsbreite der Daten- zur Halbwertsbreite der Ergebniskurve für  $N = 9108$  Teilchen mit  $\epsilon = 0.95$ .

$\nu_0$  sind wieder durch Anpassung der analytischen Kurven an die Datenkurven (Abb. 6.1) gewonnen worden, in Tab. 6.1 aufgeführt und in Abb. 6.2 eingezeichnet. Zum Vergleich sind nochmals die Ergebnisse des dissipationsfreien Experiments mit aufgeführt. Man kann auch hier eine zeitliche Abhängigkeit  $\nu_0 = \nu_0(t)$  erkennen, jedoch ist diese über den gleichen Zeitraum von  $9.2 T_{\text{Kep}}$  nicht so stark anwachsend (29 %-iger Zuwachs) wie für den dissipationsfreien Fall (75 %-iger Zuwachs), Abb. 5.6. Dieser Unterschied wird verständlich, wenn man bedenkt,

dass ein zeitlich anwachsendes  $\nu_0$  - wie in Abschnitt 5.3 bereits besprochen - den Effekt des Zerfließens verstärkt: also darf bei einer für dissipierende Systeme typisch schwächeren dynamischen Aktivität auch  $\nu_0$  nicht so stark zunehmen wie es für  $\epsilon = 1$  der Fall ist.

## 6.2. Der vertikal viskos zerfließende Ring

Wie die Simulationen zeigen (Abbn. 2.2, 6.3 und 6.4), erkennt man im Gegensatz zu den dissipationfreien numerischen Experimenten eine weniger aktive Dynamik, denn die Ringe weiten sich vertikal (und damit radial) umso langsamer aus, je kleiner  $\epsilon$  ist. Der einzige Grund dafür ist der Umstand, dass die Teilchen nach dem Stoß weniger kinetische Energie besitzen und dadurch länger näher beieinander verweilen können. In [2] wird genau dieses Verhalten gezeigt, dass nämlich Ringsysteme mit inelastisch stoßenden Teilchen relativ schnell abflachen, ein quasi-stationäres Gleichgewicht erreichen und nur auf sehr langer Zeitskala radial und vertikal zerfließen. Letztendlich wird die mittlere Exzentrizität der Teilchen kleiner, d.h. Teilchen, die aus dem Verband austreten und damit größere Exzentrizitäten als andere besitzen, wird es immer weniger geben.

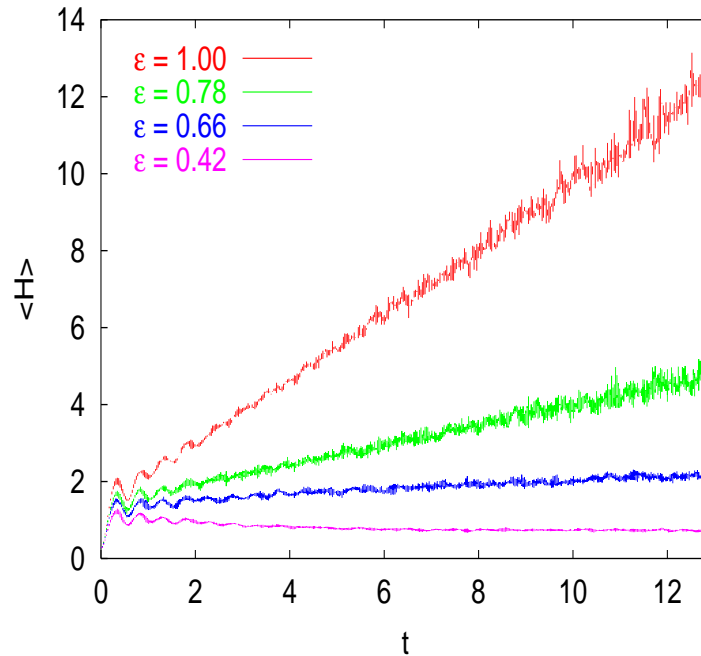


Abbildung 6.3.: Die mittlere vertikale Ausdehnung  $\langle H \rangle$  [ $2R$ ] von Simulationen mit  $\epsilon = 0.42, 0.66, 0.78$  und  $1.00$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ] für die Ringmitte  $r = 0.151 R_{\odot}$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

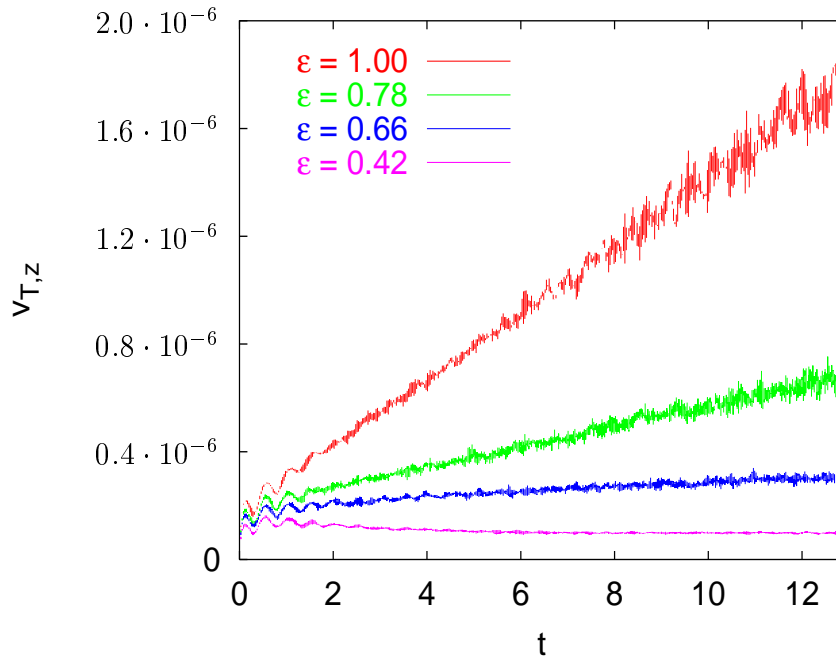


Abbildung 6.4.: Die  $z$ -Geschwindigkeitsdispersion  $v_{T,z}$  [R<sub>⊙</sub>/s] von Simulationen mit  $\epsilon = 0.42, 0.66, 0.78$  und  $1.00$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  [T<sub>Kep</sub>] für die Ringmitte  $r = 0.151 R_{\odot}$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

Man kann anhand der Abb. 6.3 erkennen, dass für stärker werdende Dissipation die mittlere vertikale Skalenhöhe tatsächlich immer weniger ansteigt und für  $\epsilon < 0.66$  das oben erwähnte quasi-stationäre Gleichgewicht erreicht wird (bis hin zu einer Abplattung des Systems relativ zur Ausgangskonfiguration, zu sehen z.B. in Abb. 6.3 für  $\epsilon = 0.42$ ). Man sieht hier deutlich den Umstand, dass niedrigere Restitutionskoeffizienten die Rate des Anwachsens von  $\langle H \rangle$  begrenzen. Zum Vergleich mit einem Ring ohne Stoßdissipation ist in den Abbn. 6.3 und 6.4 nochmals die Simulation mit  $\epsilon = 1$  aufgeführt. In Abb. 6.4 sind die dazu korrespondierenden axialen Geschwindigkeitsdispersionen zu sehen, welche ja über Gl. (5.18) mit der mittleren vertikalen Skalenhöhe zusammenhängen. Man sieht in Abb. 6.3, dass nach einer Zeit von etwa 13 Keplerperioden die mittlere vertikale Ausdehnung für  $\epsilon = 1.00$  um einen Faktor 3, 6 bzw. 14 größer ist als für  $\epsilon = 0.78, 0.66$  bzw.  $0.42$ . In den Abbn. 6.3 und 6.4 ist deutlich eine lineare Abhängigkeit von der Zeit zu erkennen und die Steigung von  $\langle H \rangle$  ist gemäß Gl. (5.18) um einen Faktor  $1/\Omega \approx 5.5 \cdot 10^3$  s größer als von  $v_{T,z}$ .

Das vertikale Zerfließen der einzelnen unterschiedlich dissipativen Systeme ist in den Abbn. 6.5 bis 6.8 und in der zugehörigen Tabelle 6.2 in einem gegenseitigen Vergleich gezeigt. Auch hier ist klar ersichtlich, dass die Intensitäten bzw. Halbwertsbreiten  $\langle H \rangle$  der Kurven für schwach dissipative Systeme mit der Zeit stärker

abnehmen bzw. stärker anwachsen als für stark dissipative. Aus der Tabelle ist für die einzelnen numerischen Experimente mit  $\epsilon = 1.00, 0.78, 0.66$  und  $0.42$  über den Zeitraum  $t = 2.8$  bis  $11.5 T_{\text{Kep}}$  jeweils eine Intensitätsabnahme (also eine Abnahme von  $n(0)^{\text{fit}}$ ) um etwa 88 %, 67 %, 46 % und 9 % zu entnehmen.

$\epsilon$	$v_{T,z}^{\text{fit}}$	$n(0)^{\text{fit}}$	$v_{T,z}^{\text{sim}}$	$\langle H \rangle^{\text{sim}}$	$\langle H \rangle^{\text{theo}}$
2.8 $T_{\text{Kep}}$					
0.42	$1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.75 \cdot 10^7$	$1.10 \cdot 10^{-7}$	0.0006	0.0007
0.66	$2.40 \cdot 10^{-7}$	$9.30 \cdot 10^6$	$2.20 \cdot 10^{-7}$	0.0012	0.0012
0.78	$3.20 \cdot 10^{-7}$	$5.90 \cdot 10^6$	$2.88 \cdot 10^{-7}$	0.0016	0.0017
1.00	$5.00 \cdot 10^{-7}$	$6.70 \cdot 10^5$	$5.10 \cdot 10^{-7}$	0.0030	0.0029
5.7 $T_{\text{Kep}}$					
0.42	$1.30 \cdot 10^{-7}$	$1.70 \cdot 10^7$	$9.60 \cdot 10^{-8}$	0.0005	0.0006
0.66	$2.70 \cdot 10^{-7}$	$6.50 \cdot 10^6$	$2.30 \cdot 10^{-7}$	0.0013	0.0015
0.78	$4.00 \cdot 10^{-7}$	$3.80 \cdot 10^6$	$4.16 \cdot 10^{-7}$	0.0023	0.0022
1.00	$7.50 \cdot 10^{-7}$	$2.80 \cdot 10^5$	$8.40 \cdot 10^{-7}$	0.0048	0.0047
8.6 $T_{\text{Kep}}$					
0.42	$1.30 \cdot 10^{-7}$	$1.65 \cdot 10^7$	$9.60 \cdot 10^{-8}$	0.0005	0.0006
0.66	$2.90 \cdot 10^{-7}$	$5.80 \cdot 10^6$	$2.74 \cdot 10^{-7}$	0.0015	0.0015
0.78	$4.70 \cdot 10^{-7}$	$2.80 \cdot 10^6$	$5.34 \cdot 10^{-7}$	0.0029	0.0028
1.00	$1.05 \cdot 10^{-6}$	$1.50 \cdot 10^5$	$1.10 \cdot 10^{-6}$	0.0069	0.0062
11.5 $T_{\text{Kep}}$					
0.42	$1.30 \cdot 10^{-7}$	$1.60 \cdot 10^7$	$9.96 \cdot 10^{-8}$	0.0006	0.0006
0.66	$3.00 \cdot 10^{-7}$	$5.00 \cdot 10^6$	$3.00 \cdot 10^{-7}$	0.0017	0.0018
0.78	$5.70 \cdot 10^{-7}$	$1.90 \cdot 10^6$	$6.11 \cdot 10^{-7}$	0.0034	0.0034
1.00	$1.55 \cdot 10^{-6}$	$8.00 \cdot 10^4$	$1.70 \cdot 10^{-6}$	0.0090	0.0095

Tabelle 6.2.: Aus dem Fit gewonnene  $z$ -Geschwindigkeitsdispersionen  $v_{T,z}^{\text{fit}}$  und äquatoriale Teilchenzahldichten  $n(0)^{\text{fit}}$  am radialen Ort  $r = 0.151 R_{\odot}$  zu verschiedenen Zeiten  $t$  und für verschiedene  $\epsilon$ . Zur Erklärung der anderen Größen s. Tab. 5.3.

### 6.2.1. Bestimmung von $v_{T,z}$ und $n(0)$

Wie für den dissipationsfreien Fall in Abschnitt 5.4 sind auch hier mit Hilfe von Modellfunktionen die in der Tabelle stehenden Parameter  $v_{T,z}^{\text{fit}}$  und  $n(0)^{\text{fit}}$  bestimmt worden.  $v_{T,z}^{\text{sim}}$  erhält man aus der Simulationsauswertung ( $\rightarrow$  Abb. 6.4) und



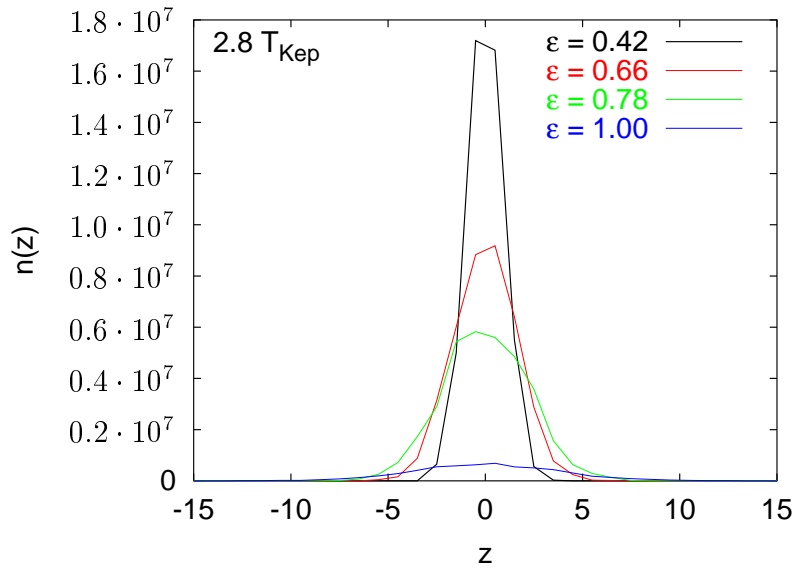


Abbildung 6.5.: Teilchenzahldichte  $n(z)$  [Teilchen/ $R_{\odot}^3$ ] für verschieden stark dissipierende Systeme über den vertikalen Ort  $z$  [ $2R$ ] für  $t = 2.8 T_{\text{Kep}}$  aufgetragen am radialen Ort  $r \approx 0.151 R_{\odot}$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

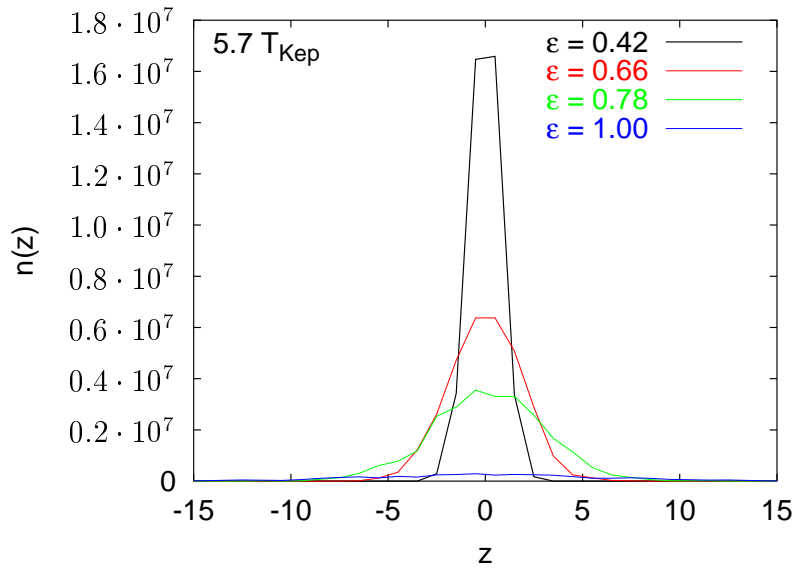


Abbildung 6.6.: Teilchenzahldichte  $n(z)$  [Teilchen/ $R_{\odot}^3$ ] für verschieden stark dissipierende Systeme über den vertikalen Ort  $z$  [ $2R$ ] für  $t = 5.7 T_{\text{Kep}}$  aufgetragen am radialen Ort  $r \approx 0.151 R_{\odot}$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

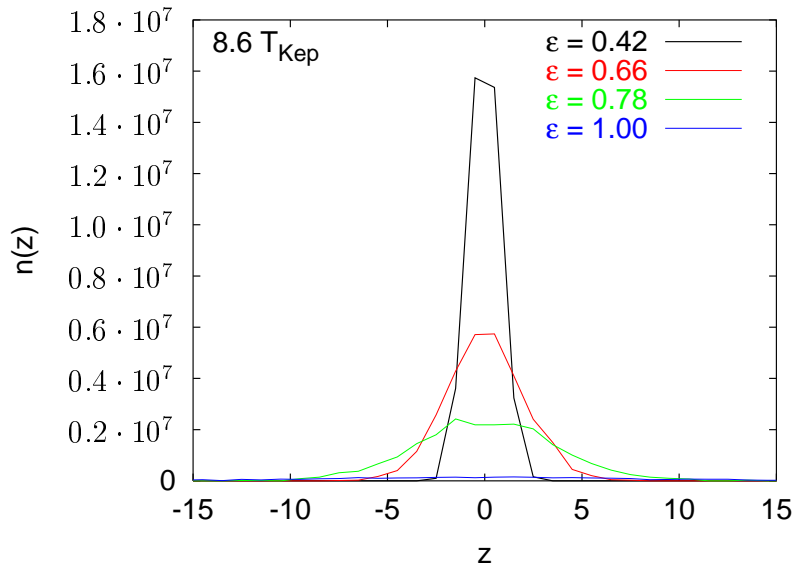


Abbildung 6.7.: Teilchenzahldichte  $n(z)$  [Teilchen/ $R_{\odot}^3$ ] für verschieden stark dissipierende Systeme über den vertikalen Ort  $z$  [ $2R$ ] für  $t = 8.6 T_{\text{Kep}}$  aufgetragen am radialen Ort  $r \approx 0.151 R_{\odot}$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

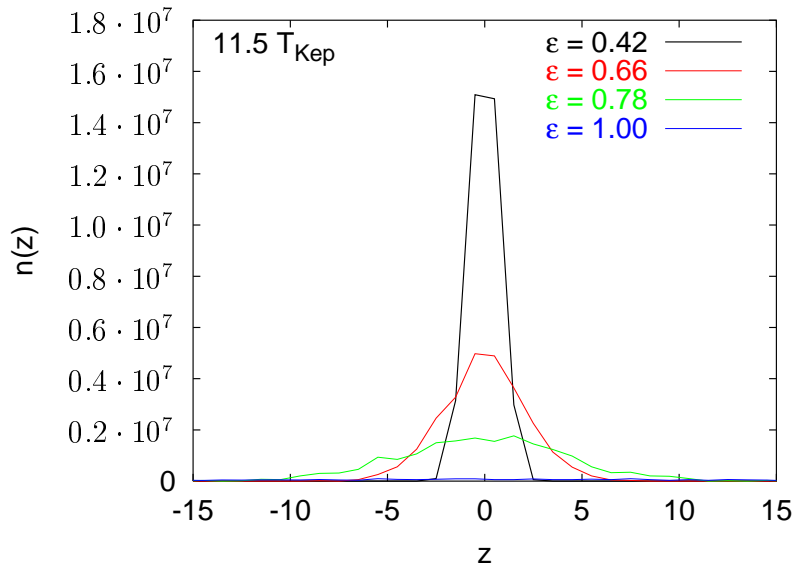


Abbildung 6.8.: Teilchenzahldichte  $n(z)$  [Teilchen/ $R_{\odot}^3$ ] für verschieden stark dissipierende Systeme über den vertikalen Ort  $z$  [ $2R$ ] für  $t = 11.5 T_{\text{Kep}}$  aufgetragen am radialen Ort  $r \approx 0.151 R_{\odot}$ . Die Reihenfolge in der Legende entspricht der Reihenfolge der Kurven (von oben nach unten).

kann wieder als Vergleich dienen. Aus  $v_{T,z}^{\text{sim}}$  folgt dann über Gl. (5.18)  $\langle H \rangle^{\text{theo}}$ , welches mit dem Simulationsergebnis  $\langle H \rangle^{\text{sim}}$  wiederum zu vergleichen ist. Aus der Tabelle ist eine recht gute Übereinstimmung dieser Werte zu erkennen, weshalb man auch für dissipierende Systeme die  $z$ -Komponente der NSG als eine zur Beschreibung der vertikalen Dynamik geeignete Gleichung ansehen kann. Allerdings muss man realisieren, dass die Lösung für die vertikale Teilchenzahldichte, Gl. (5.18), keine zeit-, sondern – wie bereits erwähnt – nur eine ortsabhängige Gleichung darstellt.



## 7. Das erweiterte Gravitationspotenzial

In der Realität vorkommende Beispiele für ein oder mehrere zusätzliche Gravitationspotenziale, die eine ringförmige Anordnung von granularem Material zusätzlich stören, sind die gut untersuchten Ringplaneten Saturn, Neptun und Uranus im Sonnensystem. In diesem Kapitel soll der Einfluss eines zusätzlichen Gravitationspotenzials in Form eines einzelnen Satelliten auf den Ring betrachtet werden. Damit unterliegen die Ringteilchen nicht mehr nur einem kugelsymmetrischen Gravitationspotenzial, sondern werden zusätzlich noch von einem zweiten, sich örtlich ändernden beeinflusst. Damit wird entgegen allen bisherigen Simulationen nun Gl. (2.1) einschließlich des zusätzlichen Gravitationspotenzials

$$\phi_i^{\text{comp}} = -\frac{Gm_i M_{\text{comp}}}{r_{i,\text{comp}}(t)}$$

gültig, wobei  $r_{i,\text{comp}}(t)$  der Abstand des beweglichen Ringteilchens von dem sich bewegenden Begleiter darstellt und die Masse  $M_{\text{comp}}$  des Begleiters im Folgenden sehr groß gewählt wird, damit Einflüsse und Unterschiede zu satellitenlosen Simulationen schneller erkannt werden können. Grundlage der Simulationen dieses Kapitels sind eine gemeinsame Zentralmasse  $M_c$ , ein gemeinsamer Restitutionskoeffizient ( $\epsilon = 0.42$ , da solche Ringe – wie in früheren Kapiteln gezeigt – dynamisch stabil bleiben und ein Temperaturgleichgewicht beibehalten) und eine gemeinsame Ringgeometrie (identische Voraussetzungen bei der Teilchenerzeugung). Außerdem bilden Satellit und Zentralmasse kein Zwei-Körper-Problem, d.h. der Zentralkörper bleibt nach wie vor im Koordinatenursprung fixiert.

Heutzutage wird im Allgemeinen anerkannt, dass die Wechselwirkung zwischen Satelliten und planetarischen Ringen bzw. den sie aufbauenden Einzelringen (s. Abb. 7.1) zu Gebieten im Ring führen kann, die eine sehr geringe optische Tiefe besitzen und damit Spalten im Planetenring bilden. Letztendliche Ursache für diese Spaltenbildungen sind sogenannte von dem oder den Satelliten im Ring ausgelöste *Dichtewellen*, welche radiale Oszillationen in der Oberflächendichte hervorrufen, die durch Resonanzen (sog. *Lindblad-Resonanzen*) zwischen Ringmaterial und den Satelliten entstehen ( $\rightarrow$  [3]). Das Resonanz-Konzept basiert auf der Annahme, dass Ringteilchen dann mit einem Satelliten in Resonanz stehen, wenn die Umlaufperiode des Begleiters  $T_{\text{comp}}$  ein ganzzahliges Vielfaches der Umlaufperiode  $T_i$  des Ringteilchens am betreffenden Ort im Ring beträgt. Sowohl theoretische Arbeiten [5] wie auch diverse numerische Simulationen [9], [10]

unterstützen die These, dass auf Grund bestimmter Resonanzen Gebiete mit so niedriger optischer Tiefe entstehen, dass man sie als Spalten innerhalb des Ringes auffassen kann, wie z.B. die *Cassini*- und *Encke*-Spalte des Saturn-Rings.

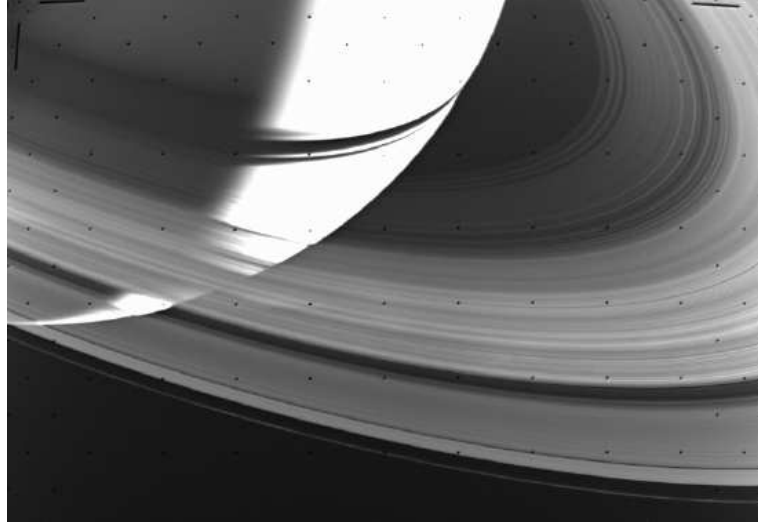


Abbildung 7.1.: Ein von Voyager 2 aufgenommenes Bild der Einzelringe des Saturn. Die gut zu sehende dunkle Lücke stellt die Cassini-Spalte mit wesentlich geringerer optischer Tiefe als ihre Umgebung dar.

Die Ausgangskonfiguration für die Simulationen mit Begleiter ist ein bei  $t = 14.5 T_{\text{Kep}}$  relaxiertes System mit  $N = 9108$  und  $\epsilon = 0.42$ , wie das zeitliche Verhalten der Gesamtgeschwindigkeitsdispersion in Abb. 7.2 nochmal zeigt. Zeitlich daran anschließende Simulationen mit Begleiter unterschiedlicher Masse zeigt Abb. 7.3. Die für diese Simulationen relevanten Daten sind in Tab. 7.1 aufgelistet. Zusätzlich ist dort noch eine Simulation mit eingestellter 2:1-Resonanz aufgeführt, auf die jedoch später näher eingegangen wird. Die Gesamtgeschwindigkeitsdispersion einer stark dissipativen Simulation nimmt, wie in Kapitel 4.1 näher besprochen, nach hinreichend langer Zeit einen Gleichgewichtszustand ein. Dieser wird sich nicht weiter ändern, wenn keine äußeren Einflüsse auftreten. Wirkt zudem noch

$M_{\text{comp}} [M_{\odot}]$	$r [R_{\odot}]$	$v_{\phi} [R_{\odot}/s]$	$T [T_{\text{Kep}}]$	$T_{\text{comp}}/T_i$
$2.90 \cdot 10^{-5}$	0.607	$1.36 \cdot 10^{-5}$	8.05	8:1
$2.90 \cdot 10^{-6}$	0.607	$1.36 \cdot 10^{-5}$	8.05	8:1
$2.90 \cdot 10^{-7}$	0.240	$2.17 \cdot 10^{-5}$	2.00	2:1
-	0.151	$2.73 \cdot 10^{-5}$	1.00	-

Tabelle 7.1.: Übersicht über die Daten der Begleiter. In Resonanz befinden sich die Teilchen der Ringmitte (ihre Daten - s. unterste Zeile).

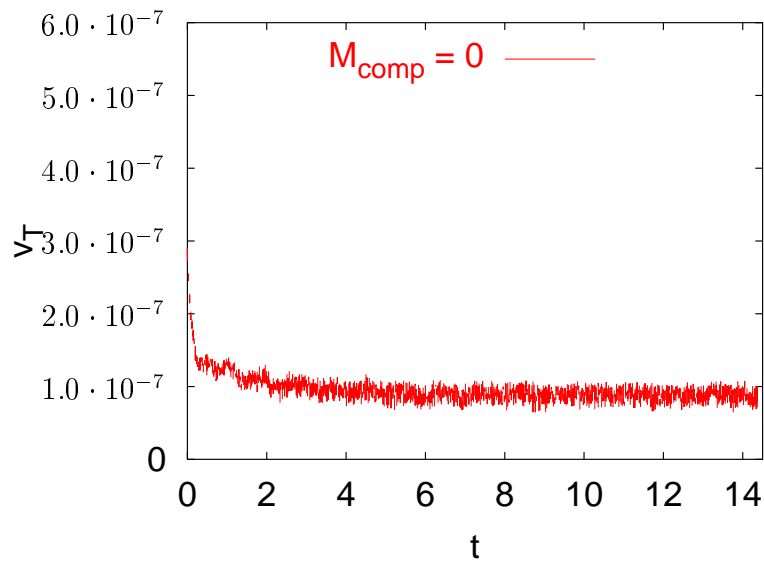


Abbildung 7.2.: Gesamtgeschwindigkeitsdispersion  $v_T$  [ $R_\odot/s$ ] über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ] bei  $r = 0.151 R_\odot$ . Nach ca.  $t = 15 T_{\text{Kep}}$  ist ein Gleichgewichtszustand eingetreten ( $\epsilon = 0.42$ ).

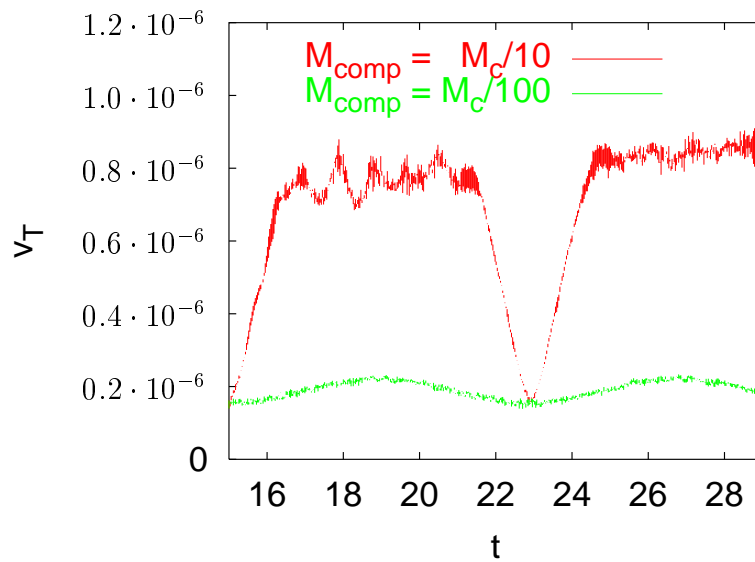


Abbildung 7.3.: Gesamtgeschwindigkeitsdispersionen für dasselbe System mit  $\epsilon = 0.42$  bei  $r = 0.151 R_\odot$  unter Einfluss zweier verschiedener Begleiter-Massen ( $M_{\text{comp}} = M_c/10$  und  $M_{\text{comp}} = M_c/100$  mit  $M_c = 2.9 \cdot 10^{-4} M_\odot$ ).

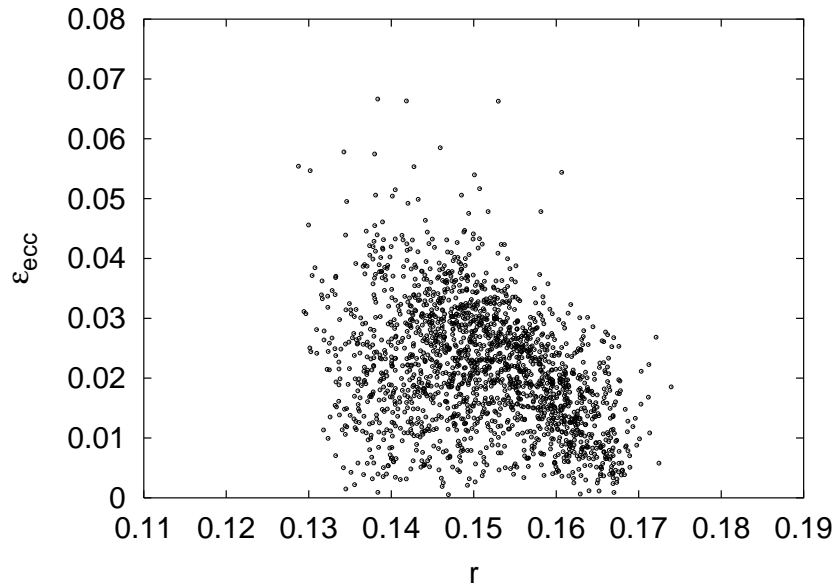


Abbildung 7.4.: Numerische Exzentrizitäten  $\epsilon_{\text{ecc}}$  der Teilchen bei einer 2:1-Resonanz zum Zeitpunkt  $t = 14.4 T_{\text{Kep}}$ , aufgetragen über den Ort  $r [R_{\odot}]$ .

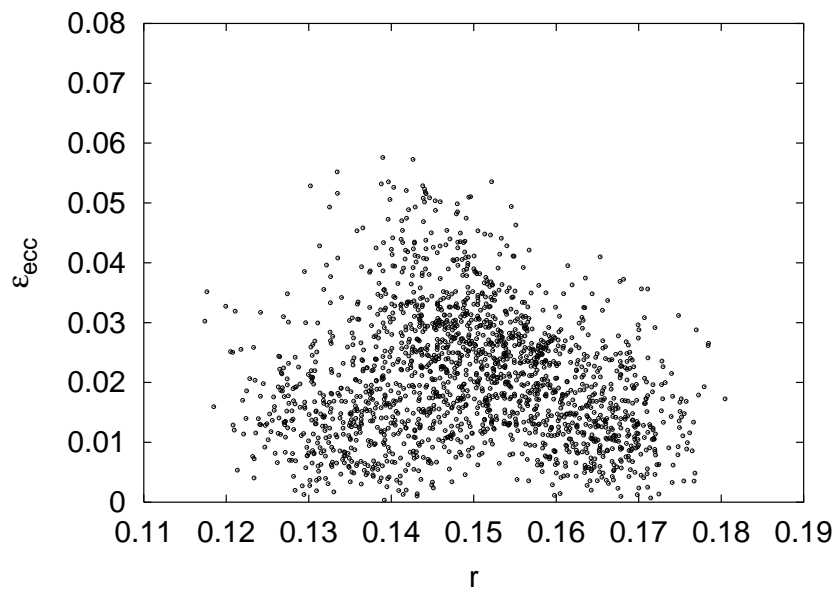


Abbildung 7.5.: Numerische Exzentrizitäten  $\epsilon_{\text{ecc}}$  der Teilchen bei einer 2:1-Resonanz zum Zeitpunkt  $t = 80.0 T_{\text{Kep}}$ , aufgetragen über den Ort  $r [R_{\odot}]$ .



ein Begleiter auf den Ring ein, wie ab  $t = 15 T_{\text{Kep}}$  geschehen, wird sich die bisher konstante Temperatur ebenfalls mit der Periode des Begleiters ändern: die Amplitude wird umso größer, je größer der gravitative Einfluss ist. Aus Abb. 7.3 kann man dann auch die Periode durch eine Modellfunktion abschätzen. Wie man sieht, liegt diese - wie erwartet - bei  $T_{\text{comp}} \approx 8 T_{\text{Kep}}$ . Einen Unterschied im Verlauf der Extremwerte erkennt man sofort: beim schwereren Begleiter sind zum Einen die Amplituden der Temperatur größer, zum Anderen die Scheitelwerte im Maximum über längere Zeit konstant. Im Gegensatz dazu zeigt die Simulation mit dem leichteren Begleiter dieses Phänomen nicht. Auf Grund des zusätzlich wirkenden Gravitationspotenzials durch den Begleiter wird die azimutale Symmetrie des Ringes gebrochen, weshalb Mittelungen von Größen über den azimutalen Winkel nicht mehr als sinnvoll erscheinen. Insbesondere können die stark vereinfachten  $2D$ -Gleichungen des Kapitels 5.2 wegen  $\partial/\partial\phi \neq 0$  nicht mehr verwendet werden.

Wie nun verhalten sich die Teilchenbahnen unter Einfluss eines in diesem Sinne erweiterten Gravitationspotenzials? Wie in früheren Kapiteln gezeigt (Abbn. 4.15 bis 4.17), ergeben sich ohne Satelliteneinfluss an den Ringrändern erhöhte numerische Exzentrizitäten, was dort höhere Geschwindigkeitsdispersionen bedingt. Im Gegensatz zu dieser Erkenntnis zeigen die numerischen Exzentrizitäten der Teilchen im erweiterten Gravitationspotenzial z.B. mit einer 2:1-Resonanz ein invertiertes Verhalten: an den Rändern sind wesentlich geringere numerische Exzentrizitäten als in der Ringmitte zu erkennen (Abbn. 7.4 und 7.5). Dieser Umstand ändert sich auch über lange Zeiträume (hier etwa über  $65 T_{\text{Kep}}$ ) nicht. Analoge Schlussfolgerungen wie in Kapitel 4.4 führen hier zu der Annahme, dass die mittlere freie Weglänge in der Ringmitte zu diesen Zeitpunkten größer sein muss als an den Rändern.

Die optische Tiefe der beiden Simulationen mit den 8:1-Resonanzen zeigt leider keine örtlichen Fluktuationen, die auf radiale Gebiete mit niedriger optischer Tiefe schließen lassen könnten, sondern eher dasselbe Verhalten wie bei satellitenlosen Ringen, d.h. eine zumindest angenäherte Gauss'sche Verteilung der Materie über den Ort. Eine merkliche Beeinflussung des Satelliten auf die radiale Materieverteilung im Ring zeigt demgegenüber eher die Langzeitsimulation mit eingestellter 2:1-Resonanz (Abbn. 7.6 und 7.7). Die Motivation für die Wahl dieser Resonanz dient die Tatsache, dass beim Saturnring die 2:1-Lindblad-Resonanz seines Mondes *Mimas* wahrscheinlich für die Cassini-Spalte verantwortlich gemacht wird, sicher jedoch als die Ursache für ihren inneren Rand gilt [10]. Das führte zu der Annahme, dass eine 2:1-Resonanz in den Simulationen ebenfalls zu Gebieten an bestimmten radialen Orten führen müsste, welche eine niedrigere optische Tiefe besitzen. Die Ergebnisse sind in den Abbn. 7.6 und 7.7 zu erkennen. Deutlich ist dort eine vom radialen Ort und vom Azimutwinkel abhängige optische Tiefe zu sehen, welche bereits bald nach Beginn der Simulation in eine bezüglich des Zentralteilchens punktsymmetrische Dichtewelle übergeht. Es sind dort Verdichtungen zu erkennen, also Gebiete erhöhter optischer Tiefe, welche

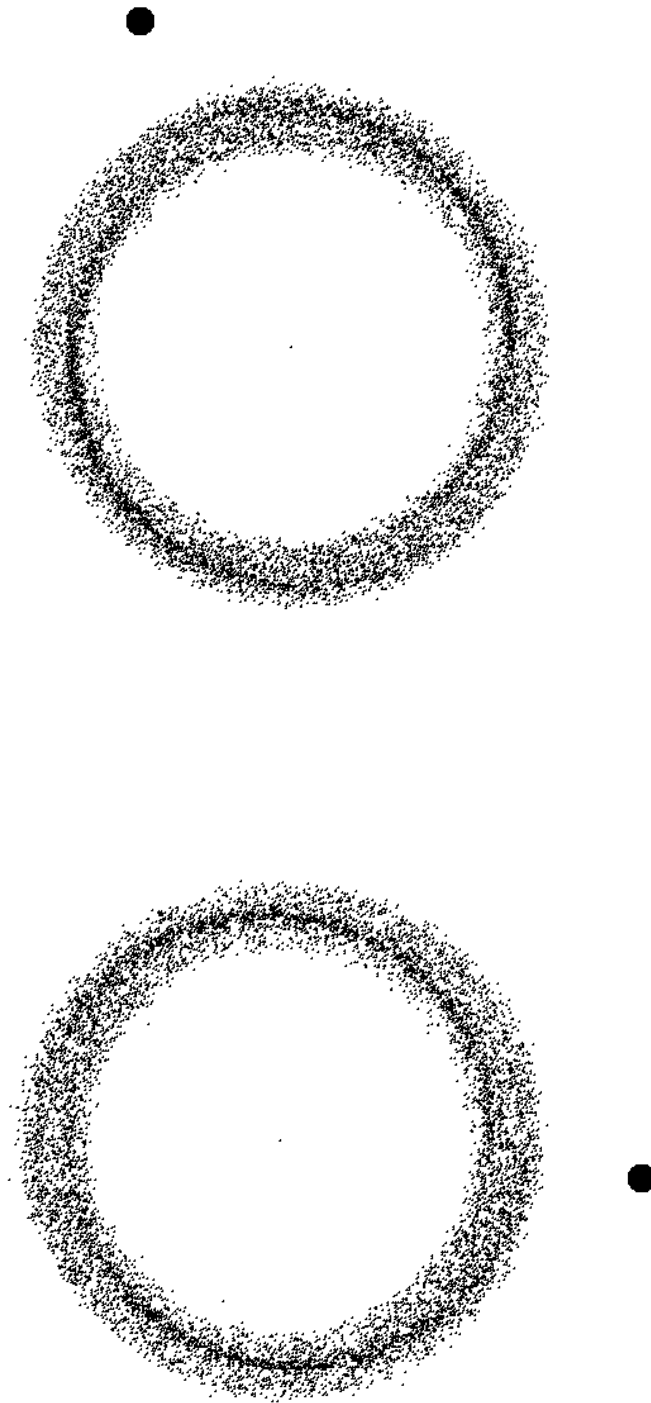


Abbildung 7.6.: 2:1-Resonanz mit  $M_{\text{comp}} = 1/1000 M_c$  zur Zeit  $t \approx 29 T_{\text{Kep}}$  (oben) und  $t \approx 43 T_{\text{Kep}}$  (unten).

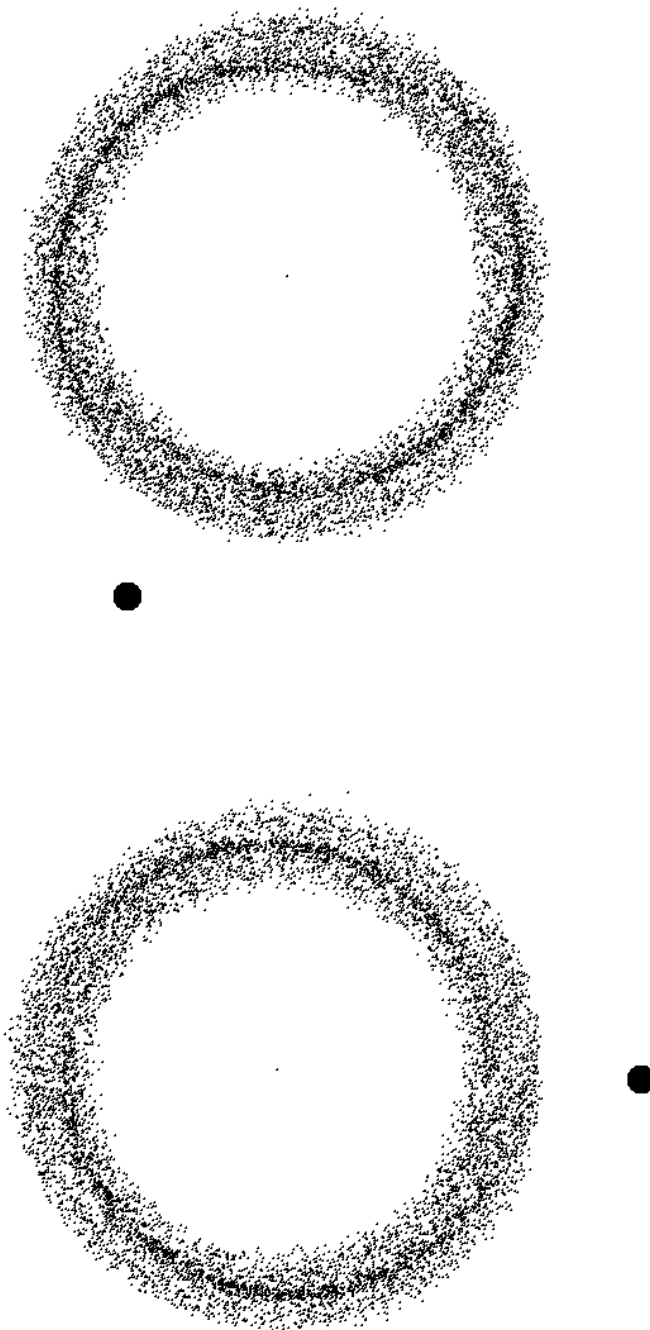


Abbildung 7.7.: 2:1-Resonanz mit  $M_{\text{comp}} = 1/1000 M_c$  zur Zeit  $t \approx 58 T_{\text{Kep}}$  (oben) und  $t \approx 86 T_{\text{Kep}}$  (unten).

also an unterschiedlichen azimuthalen Winkeln unterschiedliche Werte besitzt. Es ist also möglich, dass sich für eine bestimmte Wahl von  $M_{\text{comp}}$  und  $T_{\text{comp}}$  zu einem bestimmten radialen Ort  $r$  für alle Azimutwinkel  $\phi$  eine optische Tiefe sehr geringen Wertes einstellt (d.h. eine spaltenähnliche Region).

# 8. Zusammenfassung

## 8.1. Überblick

In dieser Arbeit wurden molekulardynamische Simulationen von 3-dimensionalen  $N$ -Teilchen-Systemen, welche sich in einem zentralen Gravitationspotenzial befinden, durchgeführt. Die Eigengravitation der Ringe wurde auf Grund ihrer im Vergleich zum Zentralkörper geringen Masse vernachlässigt. Eine weitere Vereinfachung der Simulationen bestand darin, dass ausschließlich monodisperse Systeme untersucht wurden. Zuerst wurden Simulationen gestartet, um allgemeine physikalische Erhaltungsgrößen wie Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung des Aggregats zu überprüfen und die Keplerbewegung der Teilchen zu verifizieren, um die Korrektheit des erstellten Programmcodes zu bestätigen.

Eine wichtige Aufgabe bestand darin, eine geeignete Temperaturdefinition zu finden, um Aussagen über den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeitsdispersionen und damit der Temperaturen im System zu gewinnen. Mit der Stoßviskosität gibt es einen zu variierenden Parameter, der ein Maß für die Kühlrate des Systems darstellt und mit dem das gesamte Temperaturverhalten empfindlich zu beeinflussen ist. Mit unterschiedlich eingestellten Stoßviskositäten konnte das System abgekühlt bzw. aufgeheizt werden, was einen Schwellwert für die Stoßviskosität impliziert, bei dem die Temperatur zeitlich konstant bleibt. Diesen galt es dann zu finden und mit der Theorie zu überprüfen. Neben der Untersuchung des zeitlichen Verlaufes der einzelnen Geschwindigkeitsdispersionskomponenten war auch die explizite Analyse ihres radialen Verlaufes von besonderem Interesse.

Ein weiterer wichtiger Aspekt, der in der Arbeit behandelt wurde, war der Versuch eines Überganges von der diskreten, mikroskopischen Simulation zu einer hydrodynamischen Betrachtungsweise makroskopischen Charakters. Dies wurde versucht, indem die Dynamik des Ringes sowohl in radialer wie auch in vertikaler Dimension mit entsprechenden speziellen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung überprüft wurde. Dies geschah mit Berücksichtigung verschieden stark eingestellter Dissipation. Um diesen Übergang zu bewerkstelligen, mussten die hydrodynamischen Grundgleichungen zuerst in eine zwei-dimensionale Form gebracht werden, damit sie die spezielle Symmetrie der Teilchenaggregate zu beschreiben vermögen.

Schließlich wurde noch das zeitliche Verhalten gewisser Größen des Systems be-

obachtet, während die Teilchen unter dem Einfluss eines erweiterten Gravitationspotenzials mit unterschiedlich eingestellten Resonanzen standen.

## 8.2. Ergebnisse

Die molekulardynamische Behandlung von ringförmigen Teilchenaggregaten lieferte folgende Erkenntnisse:

- die Pseudoteilchen bewegen sich auf Keplerbahnen, da die Gesamtenergie negative Beträge (gebundene Bahnen) annimmt; für Keplerbahnen folgt aus den Simulationen, wie erwartet, auch das Ergebnis  $\langle v_\phi \rangle \gg \langle v_r \rangle \approx \langle v_z \rangle \approx 0$ ; die Gesamtenergie und der Gesamtdrehimpuls aller Teilchen bleiben bei dissipationsfreien Systemen erhalten;
- auf Grund der differentiellen Rotation der einzelnen Ringbereiche ergibt sich eine nach außen hin abnehmende Temperatur und nach außen hin abnehmende scherviskose Reibungseffekte;
- für die Geschwindigkeitsdispersionskomponenten ist eine Diskrepanz  $v_{T,r} = 2 \cdot v_{T,\phi}$  über alle Zeiten gefunden worden, welche theoretisch durch die Standardabweichung (durch Zeitmittelung) der Geschwindigkeitsdispersionskomponenten für verschiedene Bahnexzentrizitäten erklärt werden konnte; außerdem konnte gezeigt werden, dass eine höhere Bahnexzentrizität eine höhere Temperatur der Teilchen bedingt;
- die höheren Werte von  $v_{T,r}$  und  $v_{T,z}$  an den Ringrändern in radialer Dimension sind durch die dortigen höheren Bahnexzentrizitäten zu erklären;
- die Bedingung für eine dünne Scheibe ist sowohl für nicht-dissipative (zumindest für ein anfängliches Zeitintervall) als auch für dissipative Systeme erfüllt  $\rightarrow$  Berechtigung der  $2D$ -NSG;
- es wurde nach der  $\epsilon$ - $\tau$ -Relation ein Schwellwert für den vorzugebenden (normalen) Restitutionskoeffizienten berechnet, wenn eine zeitlich mehr oder weniger konstante optische Tiefe angenommen wurde: wird der Schwellwert überschritten, so heizt sich das System permanent auf, wird er unterschritten, dann kühlt das System ab, bis ein Gleichgewicht erreicht wird; ist der Schwellwert eingestellt, dann verläuft die Temperatur zeitlich konstant (Quasi-Gleichgewicht);
- stark dissipative Simulationen zeigen ein in radialer und vertikaler Dimension saturierendes System, während nicht-dissipative Simulationen in diese Richtungen eine aktivere Dynamik in Form eines kontinuierlichen Auseinanderfließens aufweisen;

- der Vergleich zwischen mikroskopischer Simulation und der makroskopisch gültigen speziellen Lösung für das radiale viskose Zerfließen ergibt, entgegen der Annahme einer konstanten  $z$ -integrierten kinematischen Viskosität, eine zeitlich anwachsende, für schwach dissipative Systeme eine weniger stark anwachsende;
- die makroskopisch gültige spezielle Lösung für die vertikale Teilchendichte ist unabhängig von der Kühlrate konform mit den Simulationsergebnissen;
- simuliert man mit Begleitern, dann ergeben sich im Gegensatz zu Simulationen ohne erweitertem Gravitationspotenzial in der Ringmitte oszillierende Temperaturwerte; die Bahnexzentrizitäten sind entgegen den satellitenlosen Simulationen an den radialen Ringrändern niedriger als in der Ringmitte;
- die 2:1-Resonanz erzeugt im Ring vom Azimutwinkel abhängige Dichtewellen.

### 8.3. Ausblick

Im Rahmen der Simulation von Akkretionsscheiben könnte als zukünftige Aufgabe eine Quelle von Teilchen (Massenfluss vom Begleitstern) implementiert und die bereits vorhandene, aber in dieser Arbeit nicht benutzte Teilchensenke (kompaktes Zentralobjekt) verwendet werden. Dann kann noch - der Vollständigkeit halber - die dritte hydrodynamische Grundgleichung, d.h. die Energiebilanzgleichung, überprüft werden.

Um gewisse Strukturen im Ring wie Gebiete niedriger optischer Tiefe (z.B. Spalten) unter Einfluss von umlaufenden Satelliten zu erhalten, müssen geeignete Werte für die Begleitermasse wie auch für dessen Umlaufzeit (gleichbedeutend mit einer bestimmten Resonanz) eingestellt und möglicherweise auch sehr lange Simulationen ( $t \geq 100 T_{\text{Kep}}$ ) in Kauf genommen werden.

Ferner kann in Zukunft noch die  $z$ -integrierte kinematische Viskosität, d.h. ihr zeitliches Verhalten, näher untersucht werden. Nach Gl. (3.23) könnte sie eine Zeitabhängigkeit erhalten, wenn sich die optische Tiefe zeitlich ändern würde. Ein zeitlicher Zuwachs von  $\nu^*$  würde die Ergebnisse des Kapitels 5 bestätigen. Dies alles könnte systematisch untersucht werden, wenn die optische Tiefe bei der Teilchenerzeugung zu beeinflussen wäre. Außerdem würde man ähnliche Untersuchungen für polydisperse (zunächst einmal bidisperse) Systeme durchführen und den Einfluss unterschiedlich großer Teilchen auf gewisse Größen wie Temperatur, optische Tiefe und Geschwindigkeitsverteilung studieren können. Außerdem könnte die analytische Lösung Gl. (5.12) des radial viskos zerfließenden Ringes numerisch gelöst und mit Simulationen mit geeignet gewählten Parametersätzen

verglichen werden.

Andererseits wäre es – wie gerade erst angesprochen – eine große und wichtige Herausforderung, die Erzeugung der Teilchenaggregate kontrollierter zu gestalten, d.h. auf die optische Tiefe der Systeme so genau wie möglich Einfluss zu nehmen. Dies und die Absicht der Erzeugung bereits saturierter Anfangskonfigurationen würden dann eine tatsächlich zeitlich konstante optische Tiefe  $\tau$  bedingen, welche zur Bestimmung eines genaueren Schwellwertes für den Restitutionskoeffizienten  $\epsilon$  führen sollte. Eine kontrolliertere Teilchenerzeugung könnte z.B. insofern geschehen, als man die Teilchen kettenförmig um das Zentralpotenzial anordnet und damit in drei Dimensionen eine dichte Packung erhält. Damit könnte dann auch unmittelbar Einfluss auf die Teilchenzahldichte genommen und so gezielt weniger oder mehr Stöße pro Zeitschritt erzwungen werden. Dadurch könnten weitere Felder der Theorie hinsichtlich dünner oder dichter granularer Medien erschlossen werden (z.B. würde bei dichten Systemen dann der kollisionale Anteil des Drucktensors wichtig werden).





# A. Herleitung der hydrodynamischen Gleichungen in Zylinderkoordinaten

Für astrophysikalische Probleme wie der Beschreibung planetarischer Ringe oder Akkretionsscheiben, welche eine Rotationssymmetrie aufweisen (wobei die  $z$ -Achse des verwendeten Koordinatensystems der Rotationsachse des Systems entsprechen soll), muss die Navier-Stokes-Gleichung (im Folgenden wieder als NSG bezeichnet) in einem angepassten Koordinatensystem niedergeschrieben werden. In diesem ersten Teil des Anhangs soll die NSG in den notwendigen Zylinderkoordinaten hergeleitet werden, da in anderer Literatur oft nur das Ergebnis zum Nachschlagen (z.B. [12]) aufgeführt ist.

Im Folgenden, wie bisher auch in der gesamten Arbeit geschehen, wird die folgende Nomenklatur zu Grunde gelegt:

- zwei skalare Größen, eine skalare mit einer tensoriellen und dyadische Produkte zweier Tensoren (wie im Geschwindigkeitsgradienten) werden ohne ein Zeichen miteinander (dyadisch) multipliziert und
- Multiplikationen zwischen tensoriellen Größen (darunter fallen z.B. die Skalarprodukte und die wichtigen Tensordivergenzen) werden mit „ $\cdot$ “ gekennzeichnet.

## A.1. Herleitung der NSG in Zylinderkoordinaten

Als Ausgangspunkt für die Herleitung dient die NSG in kartesischen Koordinaten, d.h.

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{T} + \rho \mathbf{f} \quad (\text{A.1})$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{Dv_\alpha}{Dt} &= \left. \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\alpha \\ &= \left. \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} + \left. \frac{\partial x_\beta}{\partial t} \right|_{\xi_0} \left. \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right|_{t_0}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

der aus Kapitel 1 bekannten materiellen Ableitung in der *Euler'schen* Darstellungsform und der Divergenz des Spannungstensors  $\nabla \cdot \underline{T}' = \nabla \cdot (\underline{T} - p\underline{1})$ . Der erste Term der rechten Seite der Gl. (A.2) ist an einem festen räumlichen Punkt  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{x}_0$ , während die räumliche Ableitung der Geschwindigkeit und die Zeitableitung des räumlichen Punktes im zweiten Term der rechten Seite zu einem festen Zeitpunkt  $t = t_0$  bzw. für einen festen materiellen Punkt  $\boldsymbol{\xi}_0$  zu betrachten sind.

Der Übergang von einem kartesischen zu einem zylindrischen Vektor wird in zwei Schritten vollzogen. Zuerst übersetzt man die von den kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  abhängigen Vektorkomponenten gemäß  $x = r \cos(\phi)$ ,  $y = r \sin(\phi)$ ,  $z = z$  in zylindrische Koordinaten  $(r, \phi, z)$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_x(r, \phi, z) \\ \tilde{v}_y(r, \phi, z) \\ \tilde{v}_z(r, \phi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \cos \phi - v_\phi \sin \phi \\ v_r \sin \phi + v_\phi \cos \phi \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Hierbei enthält der entstehende Vektor  $\tilde{\mathbf{v}}$  zwar Zylinderkoordinaten, ist jedoch noch im kartesischen System definiert. Der zweite Schritt bildet diesen Vektor mit Hilfe der Transformationsmatrix  $\underline{M}$  linear in das zylindrische System ab:

$$\begin{pmatrix} v_r(r, \phi, z) \\ v_\phi(r, \phi, z) \\ v_z(r, \phi, z) \end{pmatrix} = \underline{M} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{v}_x(r, \phi, z) \\ \tilde{v}_y(r, \phi, z) \\ \tilde{v}_z(r, \phi, z) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Jedes krummlinige Koordinatensystem besitzt also eine spezielle Transformationsmatrix, mit der man z.B. zwischen dem kartesischen und dem betreffenden krummlinigen Koordinatensystem wechseln kann.

Um die kartesische NSG nun in das zylindrische Koordinatensystem zu übersetzen, macht man von der Umkehrung von Gl. (A.4) Gebrauch und findet im einfachsten Fall für Vektoren, auf die keine Operatoren wirken, wie z.B. das in der materiellen Ableitung im nicht-linearen Term links vom Nabla-Operator stehende Geschwindigkeitsfeld,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \\ \tilde{v}_z \end{pmatrix} = \underline{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

oder wie die auf der rechten Seite von Gl. (A.1) stehende Kraftdichte,

$$\rho \tilde{\mathbf{f}} = \rho \begin{pmatrix} \tilde{f}_x \\ \tilde{f}_y \\ \tilde{f}_z \end{pmatrix} = \underline{M}^{-1} \cdot \rho \begin{pmatrix} f_r \\ f_\phi \\ f_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Dann müssen noch die Operatoren zuerst in das zylindrische System überführt werden, um danach auf die kartesischen Vektoren und Skalare zu wirken. Die

Zeitableitung ändert ihre Form unter einer Koordinatentransformation nicht, kann also sofort auf den kartesischen Geschwindigkeitsvektor wirken:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} = \underline{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial t} - v_\phi \dot{\phi} \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \dot{\phi} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \underline{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \partial_t v_r \\ \partial_t v_\phi \\ \partial_t v_z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

worin auf Grund der *Euler'schen* Betrachtungsweise der materiellen Ableitung die zylindrisch räumlichen Koordinaten als zeitlich konstant  $r = r_0, \phi = \phi_0, z = z_0$  angesehen werden, womit oben  $\dot{\phi} \equiv 0$  wird.

Allerdings ändert sich der Nabla-Operator des nicht-linearen Terms der rechten Seite von Gl. (A.1) unter einer Koordinatentransformation:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = \underline{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_r - \frac{v_\phi^2}{r} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\phi + \frac{v_\phi v_r}{r} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

wobei auf das Geschwindigkeitsfeld, welches links vom Nabla-Operator steht, kein Operator wirkt, weshalb für ihn das bereits hergeleitete Ergebnis von Gl. (A.5), also das in Zylinderkoordinaten übersetzte Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v} = (v_r, v_\phi, v_z)^T$ , einzusetzen ist.

Auch im Druckgradienten der rechten Seite ändert sich der Operator:

$$\nabla \tilde{p} = \underline{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \partial_r p \\ \frac{1}{r} \partial_\phi p \\ \partial_z p \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Für die Tensordivergenz in Gl. (A.1) kann nicht nach obigem Schema vorgegangen werden, weshalb die Produktregel

$$\nabla \cdot (\underline{T}^T \cdot \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \underline{T}) \cdot \mathbf{a} + \text{Sp}[(\nabla \mathbf{a}) \cdot \underline{T}^T] \quad (\text{A.10})$$

herangezogen werden muss (s. [11]). Ersetzt man den allgemeinen Vektor  $\mathbf{a}$  z.B. durch den zylindrischen Einheitsvektor  $\mathbf{e}_r$ , dann folgt für das Skalarprodukt

$$\nabla \cdot (\underline{T}^T \cdot \mathbf{e}_r) = \nabla \cdot (T_{rr} \mathbf{e}_r + T_{r\phi} \mathbf{e}_\phi + T_{rz} \mathbf{e}_z),$$

und der allgemeine Vektorgradient in Zylinderkoordinaten

$$\nabla \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \partial_r a_r & \frac{1}{r} \partial_\phi a_r - \frac{a_\phi}{r} & \partial_z a_r \\ \partial_r a_\phi & \frac{1}{r} \partial_\phi a_\phi + \frac{a_r}{r} & \partial_z a_\phi \\ \partial_r a_z & \frac{1}{r} \partial_\phi a_z & \partial_z a_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

wird zu

$$\nabla \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Gl. (A.10) folgen dann die zylindrischen Komponenten der Tensordivergenz

$$\nabla \cdot \underline{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\phi\phi}}{r} \\ \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial z} + \frac{T_{\phi r} + T_{r\phi}}{r} \\ \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{zr}}{r} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

wenn man auch noch die Komponenten  $(\nabla \cdot \underline{T}) \cdot \mathbf{e}_\phi$  und  $(\nabla \cdot \underline{T}) \cdot \mathbf{e}_z$  nach gleichem Schema bestimmt. Die einzelnen Ergebnisse aus den Gln. (A.5) bis (A.9) und (A.12) ergeben dann die gesuchte NSG in Zylinderkoordinaten. Die einzelnen Komponenten der NSG lauten damit

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_r - \frac{v_\phi^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + (\nabla \cdot \underline{T}) \cdot \mathbf{e}_r + \rho f_r \\ \rho \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\phi + \frac{v_r v_\phi}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + (\nabla \cdot \underline{T}) \cdot \mathbf{e}_\phi + \rho f_\phi \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + (\nabla \cdot \underline{T}) \cdot \mathbf{e}_z + \rho f_z. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Die NSG in Zylinderkoordinaten (A.13) wird in Kapitel 5 zur rechnerischen Beschreibung des radialen Zerfließens des Ringes benutzt.

Dazu soll hier noch die genaue Form der einzelnen zylindrischen Tensorkomponenten ohne Herleitung aufgeführt werden:

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ T_{r\phi} &= T_{\phi r} = \eta \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right), \\ T_{\phi\phi} &= \left( \zeta - \frac{2}{3} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{2\eta}{r} \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right), \\ T_{rz} &= T_{zr} = \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \\ T_{\phi z} &= T_{z\phi} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right), \\ T_{zz} &= \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

## A.2. Herleitung der Kontinuitätsgleichung in Zylinderkoordinaten

Die kartesische Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.15})$$

vgl. Abschnitt 1.3. Während die Zeitableitung der Dichte bei der Koordinatentransformation forminvariant bleibt (s. Gl. (A.7)), ändert sich die Divergenz des Produkts aus  $\rho$  und  $\mathbf{v}$ . Überführt man den kartesischen Vektor  $\rho \mathbf{v}$  mit  $x = r \cos(\phi)$ ,  $y = r \sin(\phi)$ ,  $z = z$  in zylindrische Koordinaten und bildet z.B. für die erste Koordinate

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho \tilde{v}_x)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \tilde{v}_x)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \tilde{v}_x)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (\text{A.16})$$

Mit Gl. (A.3), den Ableitungen  $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\phi)$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin(\phi)}{r}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$  und analoger Vorgehensweise bei den anderen beiden Komponenten folgt schließlich die zylindrische Darstellung der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.17})$$



## B. Die Definition der Temperatur

In Anlehnung an die Temperaturdefinition beim idealen Gas [1], [18] muss für das System ein gutes Maß für die Fluktuationsgeschwindigkeiten gefunden werden, um einen Ausdruck für die kinetische Energie und damit für die Temperatur zu erhalten. Ein gutes Maß würde die Standardabweichung  $\sigma$  der Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten darstellen – vgl. Anhang D.  $\sigma$  entspricht dann der mittleren Abweichung der einzelnen Geschwindigkeitswerte von der mittleren Geschwindigkeit, ist also die im Kapitel 4 verwendete Fluktuationsgeschwindigkeit  $v_T = (\sum_i v_{T,i}^2)^{1/2}$ . Die kinetische Energie der fluktuativen Bewegung eines Teilchens der Masse  $m$ , welches sich im 3-dimensionalen Raum bewegen kann, lautet

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m (v_{T,1}^2 + v_{T,2}^2 + v_{T,3}^2) = \frac{1}{2}mv_T^2, \quad (\text{B.1})$$

worin die  $v_{T,i}$  die Fluktuationsgeschwindigkeitskomponenten entweder im kartesischen oder im zylindrischen Koordinatensystem sind. Für die kinetische Energie folgt nach dem *Gleichverteilungssatz* der Thermodynamik

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}k_B T_{th} =: \frac{3}{2}T_g, \quad (\text{B.2})$$

wonach auf jeden Freiheitsgrad der Betrag  $(1/2)k_B T_{th}$  entfällt. Hiermit wird ein Bezug zum Temperaturbegriff hergestellt.  $T_g := k_B T_{th}$  besitzt die Einheit der Energie, wird als *granulare Temperatur* pro Teilchen und Freiheitsgrad und in dieser Arbeit stets mit

$$T := T_g = \frac{2}{3}E_{\text{kin}} = \frac{m}{3}v_T^2 = \frac{m}{3}(\langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2) \quad (\text{B.3})$$

bezeichnet. Hier ist  $v_T = (\langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2)^{1/2}$  die oben erwähnte Standardabweichung der Geschwindigkeiten.

Betrachtet man einmal die Standardabweichung in Gl. (B.3) näher, so erkennt man, dass beim mittleren Quadrat  $\langle \mathbf{v}^2 \rangle$  vor der Mittelwertsbestimmung das Quadrat der Geschwindigkeiten berechnet wird. Damit werden alle evtl. auftretenden negativen Vorzeichen neutralisiert und das mittlere Quadrat muss unabhängig sein vom verwendeten Koordinatensystem. Viel empfindlicher gegenüber Koordinatentransformationen verhält sich dagegen das quadratische Mittel  $\langle \mathbf{v} \rangle^2$ , da hier

zuerst gemittelt und dann das Quadrat bestimmt wird. D.h. mit der Änderung des quadratischen Mittels ändert sich auch der Absolutwert der Standardabweichung.

Der Wert des quadratischen Mittels verändert sich, wenn man bei der vorhandenen Rotationssymmetrie unterschiedliche Koordinatensysteme betrachtet. Bei kartesischer Betrachtungsweise würden sich die  $v_x$ - und  $v_y$ -Komponenten der Pseudoteilchen in (in Bezug auf die Zentralmasse) punktsymmetrischen Volumenelementen zu Null mitteln, da sie unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Demgegenüber werden sich in zylindrischer Betrachtungsweise die  $v_r$ - und  $v_\phi$ -Komponenten nicht herausmitteln. Beide Betrachtungsweisen würden dasselbe Ergebnis liefern, wenn jeweils zuerst der Betrag der Geschwindigkeit und dann die Mittelung vorgenommen werden würde, d.h. unter Verwendung von nun  $\langle |\mathbf{v}| \rangle^2$  statt wie in Gl. (B.3) von  $\langle \mathbf{v} \rangle^2$ .

Unterteilt man die Teilringe in Parzellen, so kann man als weiteres Kriterium, welche Temperaturdefinition im System die relevante ist, die Forderung gelten lassen, dass die Standardabweichung unabhängig von der Parzellenzahl dieselbe zu sein hat, gleich, welche Art von Definition man verwendet. Bei Einteilung in Parzellen muss es in kartesischer Betrachtungsweise letztendlich gleich sein, ob man zuerst mittelt und danach die Beträge bestimmt oder umgekehrt, da sich die  $v_x$ - und  $v_y$ -Komponenten innerhalb einer Parzelle sowieso nicht zu Null mitteln, wenn die Parzellen hinreichend klein gewählt wurden. Also muss sich  $\langle \mathbf{v} \rangle^2$  umso effektiver zu Null mitteln und damit die Standardabweichung umso größer werden, je weniger Parzellen benutzt werden.

Anhand eines weitestgehend relaxierten Ringes wurden verschiedene Temperaturdefinitionen untersucht. Die folgenden Gleichungen stellen die acht verschiedenen Möglichkeiten dar, nach denen die Standardabweichung bzw. Temperatur jeweils bestimmt wurde:

$${}^{BM}|v_T|_R^{z,k} := \left( \langle v_\alpha^2 \rangle_R + \langle v_\beta^2 \rangle_R + \langle v_\gamma^2 \rangle_R - \langle \sqrt{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_\gamma^2} \rangle^2 \right)^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

$${}^{MB}|v_T|_R^{z,k} := \left( \langle v_\alpha^2 \rangle_R + \langle v_\beta^2 \rangle_R + \langle v_\gamma^2 \rangle_R - \langle v_\alpha \rangle_R^2 - \langle v_\beta \rangle_R^2 - \langle v_\gamma \rangle_R^2 \right)^{1/2} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} {}^{BM}|v_T|_P^{z,k} &:= \left( \langle \langle v_\alpha^2 \rangle_P \rangle + \langle \langle v_\beta^2 \rangle_P \rangle + \langle \langle v_\gamma^2 \rangle_P \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \sqrt{\langle v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_\gamma^2 \rangle_P} \rangle^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} {}^{MB}|v_T|_P^{z,k} &:= \left( \langle \langle v_\alpha^2 \rangle_P \rangle + \langle \langle v_\beta^2 \rangle_P \rangle + \langle \langle v_\gamma^2 \rangle_P \rangle \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\langle v_\alpha \rangle_P^2 + \langle v_\beta \rangle_P^2 + \langle v_\gamma \rangle_P^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Der Index  $P$  (*Parzellenmittelung*) bedeutet, dass eine Parzelleneinteilung,  $R$  (*Ringmittelung*) bedeutet, dass keine Parzelleneinteilung vorgenommen wurde. Sowohl für die Ringmittelung als auch für die Parzellenmittelung wurde einerseits zuerst der Betrag, dann die Mittelung (Index  $BM$ ), andererseits zuerst die Mittelung,



1		72	36	1		
2	$^{BM}  v_T _P^z$	$7.075 \cdot 10^{-8}$	$7.112 \cdot 10^{-8}$	$7.059 \cdot 10^{-8}$	$^{BM}  v_T _R^z$	$7.126 \cdot 10^{-8}$
3	$^{MB}  v_T _P^z$	$1.465 \cdot 10^{-7}$	$1.506 \cdot 10^{-7}$	$1.543 \cdot 10^{-7}$	$^{MB}  v_T _R^z$	$1.546 \cdot 10^{-7}$
4	$^{BM}  v_T _P^k$	$7.070 \cdot 10^{-8}$	$7.088 \cdot 10^{-8}$	$7.062 \cdot 10^{-8}$	$^{BM}  v_T _R^k$	$7.125 \cdot 10^{-8}$
5	$^{MB}  v_T _P^k$	$6.800 \cdot 10^{-7}$	$1.371 \cdot 10^{-6}$	$2.762 \cdot 10^{-5}$	$^{MB}  v_T _R^k$	$2.762 \cdot 10^{-5}$

Tabelle B.1.: Vergleich unterschiedlich berechneter Standardabweichungen  $|v_T|$  sowohl für die Ringmittelung als auch für die Parzellenmittelung. Zur Erläuterung der einzelnen Zeilen s. Text.

dann der Betrag (Index  $MB$ ) bestimmt und daraus in Tab. B.1 die Standardabweichung  $|v_T|$  berechnet. Die Betrachtung in unterschiedlichen Koordinatensystemen wird durch die Indizes  $k$  (kartesisch) und  $z$  (zylindrisch) angezeigt. Ein gutes Maß für die Temperatur im System hat man gewonnen, wenn der Wert unabhängig von der Parzellenanzahl und unabhängig vom angewendeten Verfahren ( $BM$  oder  $MB$ ) ist.

Wie man erkennen kann, ändern sich die Werte in der Zeile 5 (bestimmt durch die Gln. (B.5) bzw. (B.7)) recht stark, was daran liegt, dass sich auf Grund der kartesischen Betrachtung – wie oben erwähnt – die kartesischen Komponenten herausmitteln. Je weniger Parzellen verwendet werden, desto effektiver mitteln sich die Werte heraus und desto größer wird die Standardabweichung. Würde man sehr viele Parzellen nehmen, dann würde sich der Wert der wahren Standardabweichung angleichen. Bei einer Parzelle unterscheidet sich der Wert nicht von dem der Ringmittelung (wie auch erwartet).

Die Werte in Zeile 3 (ebenfalls bestimmt durch die Gln. (B.5) bzw. (B.7)) bleiben für unterschiedliche Parzellenzahlen beinahe konstant und entsprechen dem der Ringmittelung, was an den zylindrischen Komponenten liegt, die sich nicht herausmitteln. Trotzdem können sich auch hier die zylindrischen Komponenten, wenn auch nur geringfügig, herausmitteln, wenn z.B. in einer Parzelle Teilchen sind, die sowohl negative wie auch positive  $\langle v_r \rangle$ - bzw.  $\langle v_z \rangle$ -Komponenten besitzen. Dies muss in Zeile 3 der Fall sein, da die dortigen Standardabweichungen ein wenig größere Werte besitzen als in den anderen Zeilen (Bsp. hierfür zur Veranschaulichung ist der radial zerfließende Ring (Kapitel 5), bei dem am inneren Ringrand Teilchen sich in Richtung Zentralmasse und am äußeren Ringrand in entgegengesetzte Richtung bewegen).

In Zeile 2 und 4 (beide bestimmt durch die Gln. (B.4) bzw. (B.6)) sind die Standardabweichungen unabhängig von der Parzellenanzahl, stimmen auch mit der Ringmittelung und sogar gegenseitig überein. Dies liegt daran, dass in beiden Fällen zuerst der Betrag und dann die Mittelung vorgenommen wird. Das wird die gegenseitige Vernichtung von Komponenten unterschiedlichen Vorzeichens ver-

meiden. Folglich müssen beide Definitionen ein gutes Maß für die Standardabweichung sein, weshalb sie auch zur Temperaturbestimmung (bzw. Bestimmung der Geschwindigkeitsdispersionen) innerhalb der gesamten Arbeit verwendet wurden. Es scheint also, dass solche Temperaturen, die durch die Gln. (B.4) und (B.6) zum Ausdruck kommen, geeignet sind zur Beschreibung einer gesamten granularen Systemtemperatur.

Die hier durch Plausibilitätsbetrachtungen erhaltenen Begründungen, welche Standardabweichung nun die angepasste ist, ist natürlich auch auf einzelne Komponenten des jeweils benutzten Koordinatensystems zu überführen, so dass die relevanten Gleichungen zur Berechnung der Standardabweichung auf eine Komponente reduziert werden können. Für die beiden nach den Überlegungen dieses Kapitels geschlussfolgerten Definitionen der Standardabweichungen für eine beliebige Komponente  $i$  gilt

$${}^{BM}|v_{T,i}|_R^{z,k} := \left( \langle v_i^2 \rangle_R - \langle \sqrt{v_i^2} \rangle^2 \right)^{1/2} \quad (\text{B.8})$$

$${}^{BM}|v_{T,i}|_P^{z,k} := \left( \langle \langle v_i^2 \rangle_P \rangle - \langle \sqrt{\langle v_i^2 \rangle_P} \rangle^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{B.9})$$

wobei im kartesischen Fall  $i \in \{x, y, z\}$  und im zylindrischen Fall  $i \in \{r, \phi, z\}$  ist. Die Definition (B.8) wird in den Kapiteln 4, 5 und 6 zur Bestimmung von Geschwindigkeitsdispersionskomponenten benutzt.

## C. Verwendete Einheiten

In der astronomischen Literatur sind die Längeneinheiten *Lichtjahr* (ly), *Parsek* (pc) und *Astronomische Einheit* (au) üblich, da sie die großen kosmischen Entfernungen am Bequemsten bemessen können. Die Ausdehnungen planetarischer Ringe (bis wenige  $10^5$  km) oder von Akkretionsscheiben (einige au) sind allerdings so klein, dass nach geeigneten Einheiten gesucht werden sollte. Für eine bequemere Achsenbeschriftung sind hierfür Sonnenradien und -massen eingeführt worden. In der gesamten Arbeit sind

- Längen in Sonnenradien  $R_\odot$  ( $1 R_\odot = 6.960 \cdot 10^5$  km),
- Massen in Sonnenmassen  $M_\odot$  ( $1 M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$  kg),
- Zeiten in Sekunden s

	in SI-Einheiten	in neuen Einheiten
$R$	273528 m	0.000393 $R_\odot$
$\rho_M$	$0.0137 \text{ kg m}^{-3}$	$2.32 \cdot 10^{-6} M_\odot R_\odot^{-3}$
$m_{\text{red}}$	$5.866 \cdot 10^{14} \text{ kg}$	$2.949 \cdot 10^{-16} M_\odot$
$\nu$	$1.01 \cdot 10^{14} \text{ kg s}^{-1}$	$5.078 \cdot 10^{-17} M_\odot \text{ s}^{-1}$
$\eta$	$0.0861 \text{ s}^{-1}$	$0.0861 \text{ s}^{-1}$
$k$	$2.5564 \cdot 10^{14} \text{ kg s}^{-2}$	$1.285 \cdot 10^{-16} M_\odot \text{ s}^{-2}$
$\omega_0$	$0.6601 \text{ s}^{-1}$	$0.6601 \text{ s}^{-1}$
$\omega$	$0.6545 \text{ s}^{-1}$	$0.6545 \text{ s}^{-1}$
$t_c$	4.8 s	4.8 s
$\epsilon$	0.66	0.66
$M_c$	$5.77 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	$2.9 \cdot 10^{-4} M_\odot$
$G$	$6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$	$3.93 \cdot 10^{-7} R_\odot^3 M_\odot^{-1} \text{ s}^{-2}$

Tabelle C.1.: Diese hier aufgeführten Größen waren beispielsweise für die Simulation mit  $\epsilon = 0.66$  eingestellt und sind hier im Vergleich mit den SI-Einheiten aufgeführt.  $M_c$  und der Zeitschritt  $\Delta t = 0.08$  s hatten alle Simulationen gemeinsam;  $G$  ist die *Newton'sche* Gravitationskonstante.

angegeben. Alle anderen in der Arbeit benutzten physikalischen Größen besitzen die in Tab. C.1 aufgeführten Einheiten.



## D. Teilchengenerierung

Da der Verlet-Algorithmus aus den alten und aktuellen Orten der Teilchen die neuen Orte und Geschwindigkeiten berechnet, müssen zu Beginn der Simulation diese Anfangsdaten angegeben werden, damit innerhalb des ersten Zeitschrittes der neue Ort berechnet werden kann. Dazu muss eine Anfangsverteilung der Teilchenorte und -geschwindigkeiten erzeugt werden, welche zumindest die aktuellen Orte liefert. Daraus werden dann mit Hilfe der aktuellen Geschwindigkeiten die alten Orte extrapoliert, worauf dann der Verlet-Algorithmus zurückgreifen und die Simulation starten kann.

Um bei der Teilchengenerierung möglichst nahe an eine Gleichgewichtsverteilung heranzukommen (damit spätere Simulationen nicht zu lange laufen), wurden die Verteilungen hinsichtlich der Orte und der Geschwindigkeiten so realitätsnah wie möglich gewählt. Das bedeutet insbesondere für die Teilchenorte

- eine *Gauss*'sche Verteilung in radiale Richtung,
- eine Gleichverteilung in azimutale Richtung
- und eine *Gauss*'sche Verteilung in axiale Richtung,

während für ihre Geschwindigkeiten

- eine *Gauss*'sche Verteilung aller kartesischen Komponenten um den Betrag der Keplergeschwindigkeit  $v_{\text{Kep,S}}$  (s. Abb. D.1) für den radialen Ringschwerpunkt (bzw. Ringmitte  $r = 0.151 R_{\odot}$ )

generiert wurde. Bei der Teilchenerzeugung kann ein Maximal- und ein Minimalwert z.B. für die  $v_x$ -Komponente angegeben werden, zwischen denen eine *Gauss*'sche Verteilung der Werte vorliegt. Für diese Art von Verteilung kann eine Standardabweichung der Geschwindigkeiten berechnet werden,

$$v_{T,x} = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2} ,$$

welche die mittlere Relativgeschwindigkeit bzw. die Geschwindigkeitsdispersion für die entsprechende Geschwindigkeitskomponente liefert.

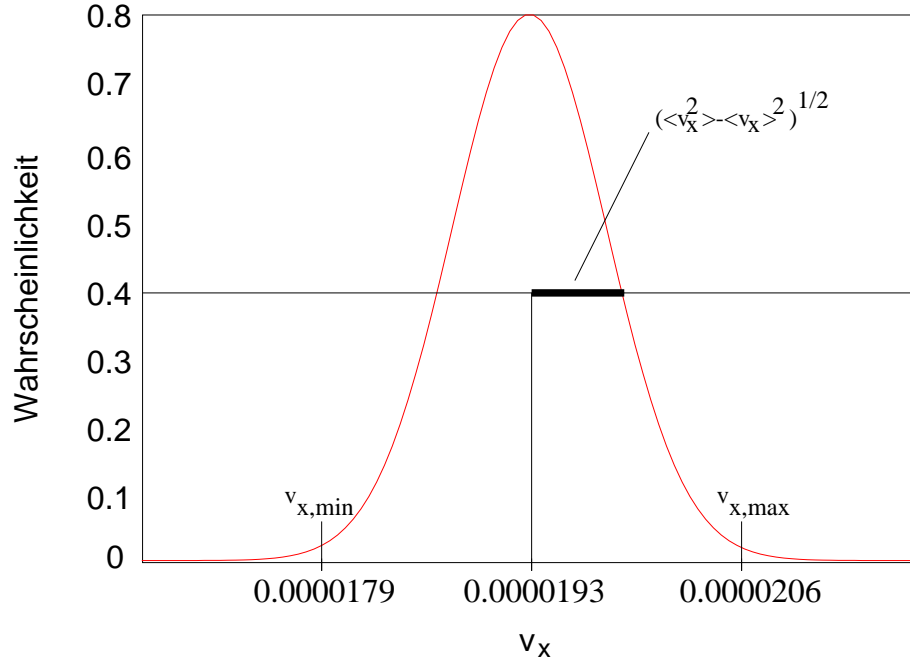


Abbildung D.1.: Veranschaulichung der Generierung einer *Gauss*'schen Verteilung am Beispiel der Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  [ $R_\odot/s$ ], mit  $v_{x,\min} = v_{x,S} - 0.05 \cdot v_{\text{Kep},S}$  und  $v_{x,\max} = v_{x,S} + 0.05 \cdot v_{\text{Kep},S}$  ( $v_{\text{Kep},S} = 2.73 \cdot 10^{-5} R_\odot/s$ ).

Da leider die Generierung der Teilchenorte willkürlich erfolgt (d.h. mit einem Zufallszahlengenerator), kann kein direkter Einfluss auf die Orte der Teilchen genommen werden. D.h. es sind dann Überlappungen die Folge, welche noch zu eliminieren sind. Die damit entstandene ringförmige Ausgangskonfiguration hat im Falle von  $N = 9108$  dann auch eine vorgegebene optische Tiefe  $\tau = 0.3$  (s. Abschnitt 3.2), was eigentlich im Vergleich zu der Verteilung der optischen Tiefe im Saturn-Ring einem eher dünnen granularen Gas (welches die Cassini- oder Encke-Spalte füllt) entspricht.

Wählt man maximal auftretende Anfangswerte von z.B. 5 % der Keplergeschwindigkeit  $v_{\text{Kep},S}$  bezüglich des radialen Ortes von  $r = 0.151 R_\odot$  bei den einzelnen Geschwindigkeitskomponenten (einschließlich der  $z$ -Komponente), dann erhält man ein oszillierendes Verhalten der kinetischen Energie, welches für  $E_{\text{kin},z}$  eine kleinere Periode besitzt als für  $E_{\text{kin},x} + E_{\text{kin},y}$ , was ein Vergleich der Abb. D.2 mit D.3 zeigt. Dies ist auf die Entkopplung der NSG-Komponenten zurückzuführen (Abschnitt 5.4.2). Außerdem sieht man in Abb. D.2, dass  $E_{\text{kin},x} + E_{\text{kin},y}$  für die Simulation, bei der zu Beginn  $v_{z,0} = 0.05 \cdot v_{\text{Kep},S}$  gewählt wurde, um einen kleineren

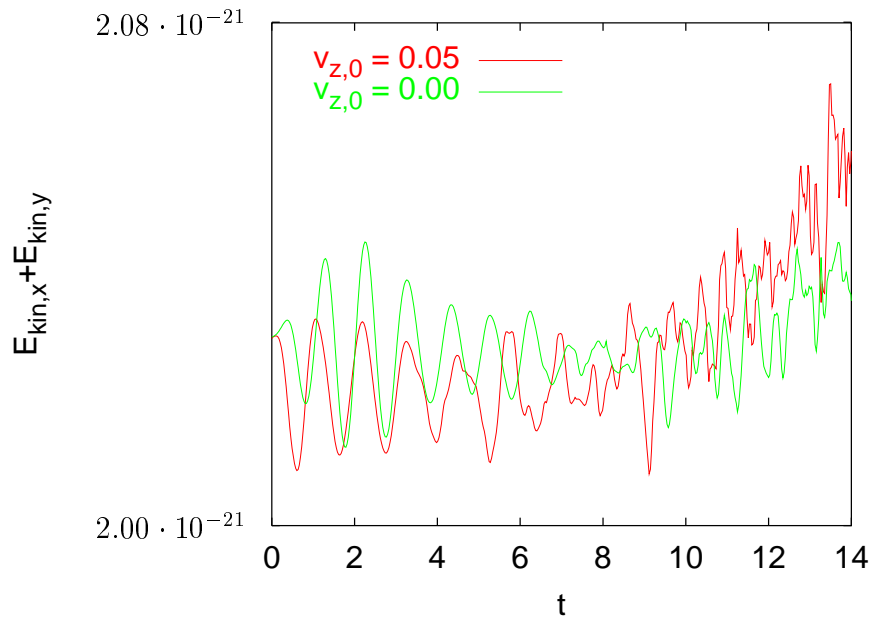


Abbildung D.2.: Verlauf der Summe der  $x$ - und  $y$ -Komponente der kinetischen Energie  $E_{\text{kin},x} + E_{\text{kin},y}$  [ $M_{\odot} R_{\odot}^2 / \text{s}^2$ ] über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ] für  $\epsilon = 1.00$ .

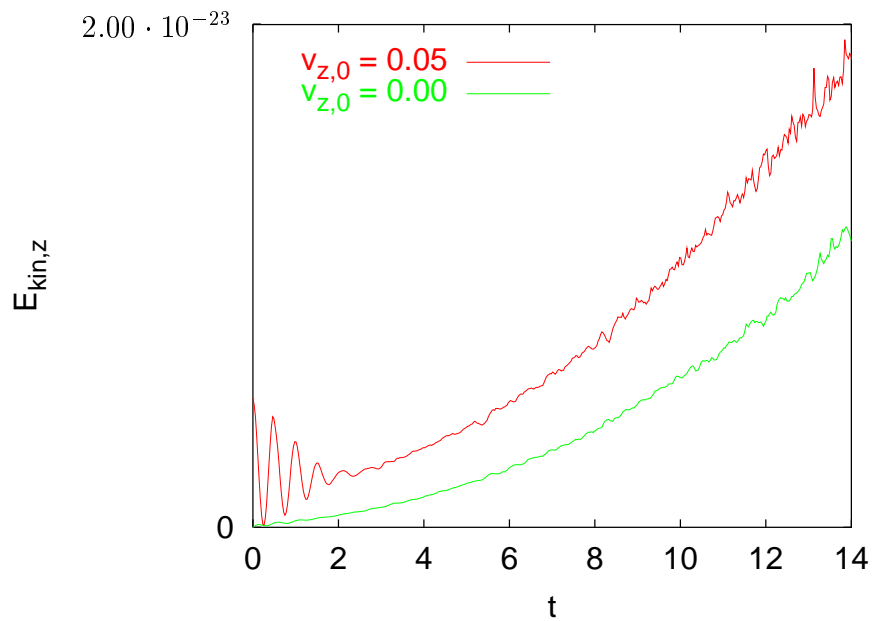


Abbildung D.3.: Verlauf der  $z$ -Komponente der kinetischen Energie  $E_{\text{kin},z}$  [ $M_{\odot} R_{\odot}^2 / \text{s}^2$ ] über die Zeit  $t$  [ $T_{\text{Kep}}$ ] für  $\epsilon = 1.00$ .

Mittelwert oszilliert als bei der Simulation, für die  $v_{z,0} = 0$  gewählt wurde. Dies ist verständlich, da die Wahl  $v_{z,0} \neq 0$  auf Kosten von  $E_{\text{kin},x,0} + E_{\text{kin},y,0}$  geht. Der allgemein ansteigende Verlauf der einzelnen Komponenten der kinetischen Energie resultiert wieder aus der Heizung des Systems durch differenzielle Rotation. Näheres dazu ist in Kapitel 4 nachzulesen.



## E. Auswertung der Simulationen

Die Auswertungen der einzelnen Simulationen beziehen sich jeweils auf die Einteilung der ringförmigen Teilchenaggregate in sogenannte Teilringe, in denen sich jeweils nur noch ein Teil aller Teilchen befindet (im Allgemeinen wenige  $10^2$  Pseudoteilchen) und die in Abb. E.1 zur Veranschaulichung in das System mit eingezeichnet sind. Relevante physikalische Größen wie die Anzahldichte, die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten der Teilchen sowohl in kartesischen wie auch in zylindrischen Koordinaten oder auch die daraus zu berechnenden Temperaturkom-

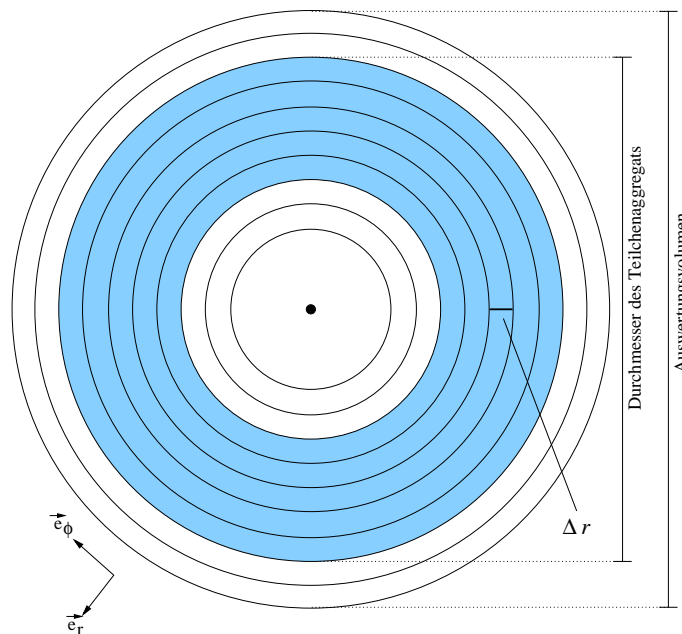


Abbildung E.1.: Das Auswertungsvolumen (hier Draufsicht) wird in viele Teilringe derselben Breite  $\Delta r$  und Höhe  $h$  eingeteilt, worin sich dann zu jedem Simulationszeitpunkt eine bestimmte Anzahl von Pseudoteilchen befindet, über welche dann relevante physikalische Größen gemittelt werden können.

ponenten können dann für jeden Teilring zu einem bestimmten Simulationszeitpunkt bestimmt werden. Diese Auswertung entspricht dann der Durchführung eines Experimentes, da man zu einem bestimmten Zeitpunkt den Zustand des

Systems untersucht. Dabei muss man darauf achten, dass die Volumina der Teilringe hinreichend groß gewählt werden, damit sie hinreichend viele Pseudoteilchen beinhalten und man daher mit der erforderlichen Genauigkeit Statistik betreiben kann. Ein typischer Mittelungsvorgang im Rahmen einer Auswertung ist die Aufsummierung einer an ein Teilchen gehefteten physikalischen Größe  $\phi^i$  über alle  $\Delta N$  Pseudoteilchen in dem Teilring  $i$  und der anschließenden Division durch  $\Delta N$

$$\langle \phi \rangle^i = \frac{1}{\Delta N} \sum_{n=1}^{\Delta N} \phi_n^i . \quad (\text{E.1})$$

So werden z.B. die einzelnen gemittelten Geschwindigkeitskomponenten gewonnen. Die Bestimmung der totalen Geschwindigkeitsdispersion pro Teilring wird aus bereits gemittelten Größen gewonnen, s. Anhang B, nämlich

$$\langle v_T \rangle^i = \sqrt{\frac{1}{\Delta N} \sum_{n=1}^{\Delta N} (v_T^2)^i - \left( \frac{1}{\Delta N} \sum_{n=1}^{\Delta N} v_T^i \right)^2} = \sqrt{\langle v_T^2 \rangle^i - \left( \langle v_T \rangle^i \right)^2} , \quad (\text{E.2})$$

d.h. für jeden Teilring werden die Größen  $\langle v_T^2 \rangle^i$  und  $\left( \langle v_T \rangle^i \right)^2$  gemäß Gl. (E.1) bestimmt und danach die Geschwindigkeitsdispersion gemäß Gl. (E.2) ermittelt. Die Bestimmung von Anzahldichten entsprechen keiner Mittelung, sondern ledig-

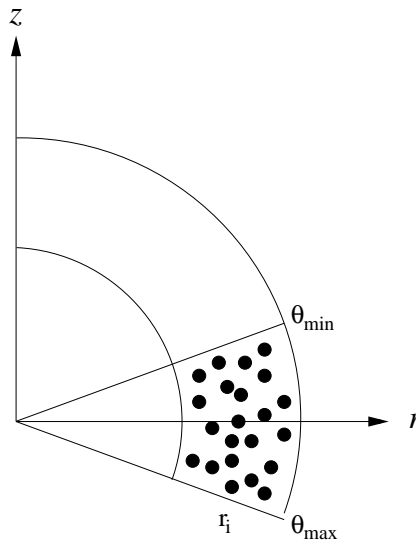


Abbildung E.2.: Schnitt durch eine Kugelschale des Auswertungsvolumens. Das  $\theta$ -Intervall wird so groß gewählt, dass in vertikaler Richtung alle Pseudoteilchen erfasst werden. Zu einem gegebenen Kugelschalenort  $r_i$  kann dann die vertikale Teilchendichte  $n^i(z)$  bestimmt werden.

lich einer Aufzählung der Teilchen pro Teilring:

$$\Delta n^i(r) = \frac{\Delta N^i(r)}{\Delta V^i(r)}, \quad (\text{E.3})$$

wobei  $\Delta N^i(r)$  die Gesamtzahl der Pseudoteilchen und  $\Delta V^i(r) = \pi h (r_{i+1}^2 - r_i^2)$  das Volumen des jeweiligen Teilringes ( $h$  sei die Höhe des Teilringes) darstellen, wobei beide Größen vom radialen Ort des Teilringes abhängen. Diese Form der Teilchenzahldichte wurde in den Kapiteln 5.3, 6.1 benötigt.

Die in den Kapiteln 5.4, 6.2 benutzte vertikale Anzahldichte  $\Delta n^i(z)$  wird in der Weise gewonnen, dass man das Auswertungsvolumen nun nicht in Teilringe aufteilt, sondern in Kugelschalen (in der Praxis wurde in beiden Fällen das Simulationsvolumen in 60 Teilringe bzw. Kugelschalen eingeteilt). Man betrachtet dazu eine Kugelschale an einem bestimmten radialen Ort  $r_i$  und zählt innerhalb eines vorgegebenen  $\theta$ -Intervalls  $[\theta_{\min} : \theta_{\max}]$  – s. Abb. E.2 – alle in diesem ausgeschnittenen Volumen befindliche Teilchen und teilt schließlich durch das Volumen. Aufgetragen werden die so gewonnenen Werte nicht über  $r$ , sondern über  $z(r, \theta)$ . Damit gewinnt man dann zu einem gegebenen radialen Ort die Teilchenzahldichte in Abhängigkeit der vertikalen Koordinate  $z$ . Das Ergebnis ist dann ein Verlauf der vertikalen Teilchenzahldichte zu einem bestimmten radialen Ort für einen bestimmten Simulationszeitpunkt. Die in dieser Arbeit gezeigten vertikalen Anzahldichten wurden immer für die Mitte der verwendeten ringförmigen Teilchenaggregate, d.h. für  $r_i = 0.151 R_\odot$ , bestimmt.



# Danksagungen

Ein ganz besonderer Dank geht an meinen Betreuer, HD Dr. Stefan Luding, der mir das ganze Jahr über stets ein offenes Ohr lieh und mir uneingeschränkte Hilfestellungen bei physikalischen Problemen und Fragestellungen hinsichtlich der Form dieser Diplom-Arbeit gewährte und ihren Hauptbericht übernahm. Besonders an die gemeinsamen, nicht-alkoholfreien Donnerstag-Abende im Unithekle werde ich mich gern zurück erinnern.

Desweiteren geht der Dank auch an Prof. Dr. H. Herrmann für die Aufnahme an sein Institut und an Prof. Dr. H. Ruder (Universität Tübingen) für die Übernahme des Mitberichtes und die konstruktiven Anregungen beim Zwischenbericht.

Insbesondere möchte ich folgenden Personen meinen Dank aussprechen, ohne deren unmittelbare Hilfe das Herzstück dieser Diplomarbeit, der Programm-Code, nicht hätte erstellt werden können; es sind dies Dipl.-Phys. Marc Lätzel und Dipl.-Phys. Reinmar Mück, die auch meine programmiertechnischen Fragen über ein langes Jahr über sich ergehen lassen mussten. Auch erwähnen möchte ich Dr. Kai Höfler, Dipl.-Phys. Christian Manwart, Dipl.-Phys. Matthias Müller und Dr. Stefan Schwarzer, die vor meiner Zeit einen großen Anteil an der Erstellung der vom Programm-Code benutzten Bibliotheken hatten, während letzterer mir ebenfalls des öfteren konstruktive Vorschläge physikalischer Natur gab.

Zuletzt, deshalb aber nicht weniger wichtig, sind die Personen Dr. Jürgen Schmidt (Universität Potsdam) und Dr. Roland Speith (Universität Tübingen) zu nennen. Durch ihre außergewöhnlich konstruktiven Ideen und Vorschläge sind sie dafür verantwortlich, dass diese Diplomarbeit inhaltlich zu der Form führte, wie sie jetzt vorliegt. Jürgen Schmidt sei zudem noch für die Erstellung seiner Routine gedankt, welche die numerische Lösung des radial viskos zerfließenden Ringes bestimmt, daraus folgende Ergebnisse jedoch aus zeitlichen Gründen nicht mehr in diese Arbeit eingehen konnten.

Auch meinem Leidensgenossen Jürgen Falkner, mit dem ich nicht nur dieses Jahr verbracht hatte, sei für seinen außergewöhnlichen Eifer hinsichtlich der Programmierung gedankt, wovon ich oftmals profitieren konnte. Zudem waren die kontroversen Gespräche mit ihm recht ergiebig.

Meinen Eltern danke ich einerseits für die finanzielle Unterstützung, andererseits für aufmunternden Zuspruch während des Studiums, was mich dahin führte, wo ich jetzt angelangt bin.



# Literaturverzeichnis

- [1] ADAM, G. und O. HITTMAIR: *Wärmetheorie*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1988.
- [2] BRAHIC, A.: *Systems of Colliding Bodies in a Gravitational Field: I - Numerical Simulation of the Standard Model*. *Astronomy and Astrophysics*, 54:895–907, 1977.
- [3] CUZZI, J. N. und J. J. LISSAUER: *Saturn's rings: properties and processes*. In: *Planetary Rings*, Tucson, Arizona, USA, 1984. The University of Arizona Press.
- [4] FRANK, J., A. KING und D. RAINE: *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, G.B., 1992.
- [5] FRANKLIN, F. und M. LECAR: *Ring particle dynamics in resonances*. In: *Planetary Rings*, Tucson, Arizona, USA, 1984. The University of Arizona Press.
- [6] GOLDREICH, P. und S. TREMAINE: *The velocity dispersion in Saturn's rings*. *Icarus*, 34:227–239, 1978.
- [7] GREINER, W.: *Theoretische Physik: Mechanik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1989.
- [8] GREINER, W. und H. STOCK: *Theoretische Physik: Hydrodynamik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1991.
- [9] HAENNINEN, J.: *Numerical Simulations of Moon-Ringlet Interaction*. *Icarus*, 103:104–123, 1993.
- [10] HAENNINEN, J. und H. SALO: *Collisional Simulations of Satellite Lindblad Resonances*. *Icarus*, 97:228–247, 1992.
- [11] LAI, W. M., D. RUBIN und E. KREMPL: *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, New York, Beijing, Frankfurt, ..., 1978.
- [12] LANDAU, L. D. und E. M. LIFSCHITZ: *Hydrodynamik*. Akademie Verlag, Berlin, 1966.

- 
- [13] LUDING, S.: *Collisions & Contacts between two particles*. In: HERRMANN, H. J., J.-P. HOVI und S. LUDING (Herausgeber): *Physics of dry granular media - NATO ASI Series E350*, Seite 285, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishers.
- [14] LÜST, R.: *Die Entwicklung einer um einen Zentralkörper rotierenden Gasmasse I*. Zeitschrift für Naturforschung, 7a:87–98, 1951.
- [15] PRINGLE, J. E.: *Accretion Discs in Astrophysics*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 19:137–162, 1981.
- [16] SPEITH, R.: *Untersuchung von Smoothed Particle Hydrodynamics anhand astrophysikalischer Beispiele*. Doktorarbeit, Universität Tübingen, 1998.
- [17] STEWART, G. R., D. N. C. LIN und P. BODENHEIMER: *Collision-induced transport processes in planetary rings*. In: *Planetary Rings*, Tucson, Arizona, USA, 1984. The University of Arizona Press.
- [18] STRAUSS, O.: *Kontinuumsbeschreibung inhomogener granularer Medien*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1999.
- [19] TRULSEN, J.: *Numerical Simulation of Jetstreams*. Astrophysics and Space Science, 17:241–262, 1972.





